Systèmes de racines

Valentin Massicot

Université de Reims Champagne-Ardenne

23 août 2025

Sommaire

Sommaire

Définition et interprétation géométrique

Soit $(E, (\,,\,))$ un espace euclidien. Si $x \in E$, on pose σ_x la réflexion orthogonale selon $H_x = \{y \in E \mid (x, y) = 0\}$.

Définition et interprétation géométrique

Soit $(E, (\ ,\ ))$ un espace euclidien. Si $x \in E$, on pose σ_x la réflexion orthogonale selon $H_x = \{y \in E \mid (x, y) = 0\}$.

Définition

Une partie finie Φ de E est un système de racines si

Définition et interprétation géométrique

Soit $(E, (\ ,\ ))$ un espace euclidien. Si $x \in E$, on pose σ_x la réflexion orthogonale selon $H_x = \{y \in E \mid (x, y) = 0\}$.

Définition

Une partie finie Φ de E est un système de racines si

$$(S1) \quad \mathrm{Vect}(\Phi) = E \text{ et } 0_E \notin \Phi.$$

Définition et interprétation géométrique

Soit $(E, (\ ,\ ))$ un espace euclidien. Si $x \in E$, on pose σ_x la réflexion orthogonale selon $H_x = \{y \in E \mid (x, y) = 0\}$.

Définition

Une partie finie Φ de E est un système de racines si

$$(S1) \quad \mathrm{Vect}(\Phi) = E \text{ et } 0_E \notin \Phi.$$

$$(S2) \quad \text{Si } \alpha, \lambda\alpha \in \Phi \text{ alors } \lambda = \pm 1.$$

Définition et interprétation géométrique

Soit $(E, (\ ,\ ))$ un espace euclidien. Si $x \in E$, on pose σ_x la réflexion orthogonale selon $H_x = \{y \in E \mid (x, y) = 0\}$.

Définition

Une partie finie Φ de E est un système de racines si

$$\begin{aligned} &(S1) \quad \mathrm{Vect}(\Phi) = E \text{ et } 0_E \notin \Phi. \\ &(S2) \quad \text{Si } \alpha, \lambda\alpha \in \Phi \text{ alors } \lambda = \pm 1. \\ &(S3) \quad \text{Si } \alpha, \beta \in \Phi \text{ alors } \sigma_\alpha(\beta) \in \Phi. \end{aligned}$$

Définition et interprétation géométrique

Soit $(E, (\ ,\ ))$ un espace euclidien. Si $x \in E$, on pose σ_x la réflexion orthogonale selon $H_x = \{y \in E \mid (x, y) = 0\}$.

Définition

Une partie finie Φ de E est un système de racines si

$$
\begin{array}{ll}
(S1) & \mathrm{Vect}(\Phi) = E \text{ et } 0_E \notin \Phi. \\
(S2) & \text{Si } \alpha, \lambda\alpha \in \Phi \text{ alors } \lambda = \pm 1. \\
(S3) & \text{Si } \alpha, \beta \in \Phi \text{ alors } \sigma_\alpha(\beta) \in \Phi. \\
(S4) & \text{Si } \alpha, \beta \in \Phi \text{ alors } \langle \alpha\ ,\ \beta \rangle := 2\dfrac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \mathbb{Z}.
\end{array}
$$

Définition et interprétation géométrique

Soit $(E, (\ ,\ ))$ un espace euclidien. Si $x \in E$, on pose σ_x la réflexion orthogonale selon $H_x = \{y \in E \mid (x, y) = 0\}$.

Définition

Une partie finie Φ de E est un système de racines si

$$
\begin{aligned}
&(S1) \quad \mathrm{Vect}(\Phi) = E \text{ et } 0_E \notin \Phi.\\
&(S2) \quad \text{Si } \alpha, \lambda\alpha \in \Phi \text{ alors } \lambda = \pm 1.\\
&(S3) \quad \text{Si } \alpha, \beta \in \Phi \text{ alors } \sigma_\alpha(\beta) \in \Phi.\\
&(S4) \quad \text{Si } \alpha, \beta \in \Phi \text{ alors } \langle \alpha\ ,\ \beta \rangle := 2\frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

On dit que Φ est de rang $\dim(E)$.

Définition et interprétation géométrique

Soit $(E, (\ ,\ ))$ un espace euclidien. Si $x \in E$, on pose σ_x la réflexion orthogonale selon $H_x = \{y \in E \mid (x, y) = 0\}$.

Définition

Une partie finie Φ de E est un système de racines si

$$\begin{array}{ll}
(S1) & \mathrm{Vect}(\Phi) = E \text{ et } 0_E \notin \Phi. \\
(S2) & \text{Si } \alpha, \lambda\alpha \in \Phi \text{ alors } \lambda = \pm 1. \\
(S3) & \text{Si } \alpha, \beta \in \Phi \text{ alors } \sigma_\alpha(\beta) \in \Phi. \\
(S4) & \text{Si } \alpha, \beta \in \Phi \text{ alors } \langle \alpha\ ,\ \beta \rangle := 2\dfrac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \mathbb{Z}.
\end{array}$$

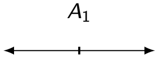
On dit que Φ est de rang $\dim(E)$.

$(S4) \Leftrightarrow$ le projeté de β sur α est un multiple demi-entier de α.
On a aussi $\sigma_\beta(\alpha) = \alpha - \langle \alpha\ ,\ \beta \rangle \beta$.

Exemples

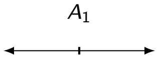
Exemples

En dimension 1 :



Exemples

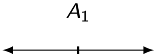
En dimension 1 :



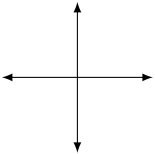
En dimension 2 :

Exemples

En dimension 1 :



En dimension 2 :

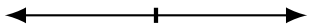


$A_1 \times A_1$

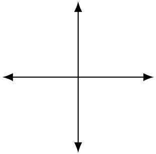
Exemples

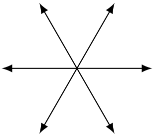
En dimension 1 :

A_1



En dimension 2 :





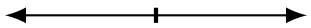
$A_1 \times A_1$

A_2

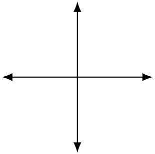
Exemples

En dimension 1 :

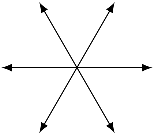
A_1



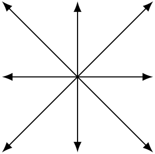
En dimension 2 :



$A_1 \times A_1$



A_2

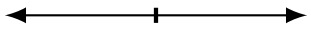


B_2

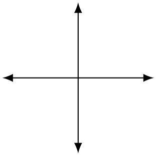
Exemples

En dimension 1 :

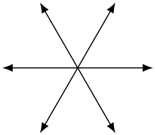
A_1



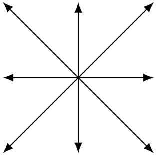
En dimension 2 :



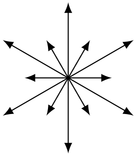
$A_1 \times A_1$



A_2



B_2

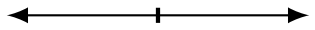


G_2

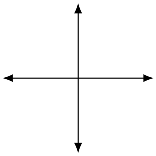
Exemples

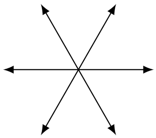
En dimension 1 :

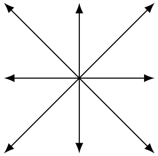
A_1

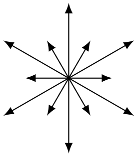


En dimension 2 :









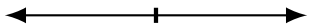
$A_1 \times A_1$ A_2 B_2 G_2

Angles remarquables

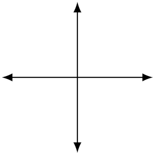
Exemples

En dimension 1 :

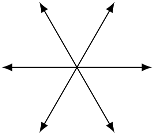
A_1



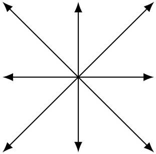
En dimension 2 :



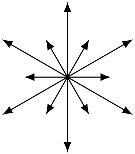
$A_1 \times A_1$



A_2



B_2



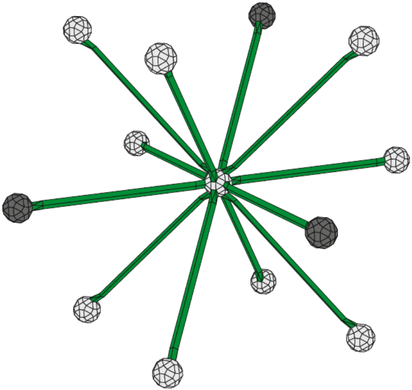
G_2

Angles remarquables

Longueurs remarquables

Exemples

En dimension 3 :



Système de racine A_3.

Brian C. Hall, Lie groups, Lie algebras, and Representations

Rigidité

Soient $\alpha, \beta \in \Phi$ telles que $\beta \neq \pm\alpha$ et $\|\beta\| \geqslant \|\alpha\|$. On pose $\theta \in [0, \pi]$ l'écart angulaire entre α et β.

Rigidité

Soient $\alpha, \beta \in \Phi$ telles que $\beta \neq \pm\alpha$ et $\|\beta\| \geqslant \|\alpha\|$. On pose $\theta \in [0, \pi]$ l'écart angulaire entre α et β.
On a

$$\begin{aligned} \langle \alpha \,,\, \beta \rangle \langle \beta \,,\, \alpha \rangle &= 4 \frac{(\alpha, \beta)^2}{\|\alpha\|^2 \|\beta\|^2} \\ &= 4 \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

Rigidité

Soient $\alpha, \beta \in \Phi$ telles que $\beta \neq \pm\alpha$ et $\|\beta\| \geqslant \|\alpha\|$. On pose $\theta \in [0, \pi]$ l'écart angulaire entre α et β.
On a

$$\begin{aligned} \langle \alpha\,,\, \beta \rangle \langle \beta\,,\, \alpha \rangle &= 4 \frac{(\alpha, \beta)^2}{\|\alpha\|^2 \|\beta\|^2} \\ &= 4 \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Peu de valeurs possibles pour les écarts angulaires.

Rigidité

Soient $\alpha, \beta \in \Phi$ telles que $\beta \neq \pm\alpha$ et $\|\beta\| \geqslant \|\alpha\|$. On pose $\theta \in [0, \pi]$ l'écart angulaire entre α et β.
On a

$$\begin{aligned}\langle \alpha\, , \, \beta \rangle \langle \beta\, , \, \alpha \rangle &= 4 \frac{(\alpha, \beta)^2}{\|\alpha\|^2 \|\beta\|^2} \\ &= 4 \cos^2 \theta.\end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Peu de valeurs possibles pour les écarts angulaires.
$\longrightarrow$ Peu de valeurs possibles pour les entiers de Cartan.

Rigidité

Soient $\alpha, \beta \in \Phi$ telles que $\beta \neq \pm\alpha$ et $\|\beta\| \geqslant \|\alpha\|$. On pose $\theta \in [0, \pi]$ l'écart angulaire entre α et β.
On a

$$\begin{aligned}\langle \alpha\,,\, \beta \rangle \langle \beta\,,\, \alpha \rangle &= 4 \frac{(\alpha, \beta)^2}{\|\alpha\|^2 \|\beta\|^2} \\ &= 4 \cos^2 \theta.\end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Peu de valeurs possibles pour les écarts angulaires.
$\longrightarrow$ Peu de valeurs possibles pour les entiers de Cartan.
$\longrightarrow$ Peu de valeurs possibles pour les ratios de longueurs.

Rigidité

Soient $\alpha, \beta \in \Phi$ telles que $\beta \neq \pm\alpha$ et $\|\beta\| \geqslant \|\alpha\|$. On pose $\theta \in [0, \pi]$ l'écart angulaire entre α et β.
Les seules configurations possibles sont :

$\langle \alpha , \beta \rangle$	$\langle \beta , \alpha \rangle$	θ	$\|\beta\|^2 / \|\alpha\|^2$
0	0	$\pi/2$	Tout est possible
1	1	$\pi/3$	1
-1	-1	$2\pi/3$	1
1	2	$\pi/4$	2
-1	-2	$3\pi/4$	2
1	3	$\pi/6$	3
-1	-3	$5\pi/6$	3

Rigidité

Soient $\alpha, \beta \in \Phi$ telles que $\beta \neq \pm\alpha$ et $\|\beta\| \geqslant \|\alpha\|$. On pose $\theta \in [0, \pi]$ l'écart angulaire entre α et β.

Les seules configurations possibles sont :

$\langle \alpha , \beta \rangle$	$\langle \beta , \alpha \rangle$	θ	$\|\beta\|^2 / \|\alpha\|^2$
0	0	$\pi/2$	Tout est possible
1	1	$\pi/3$	1
-1	-1	$2\pi/3$	1
1	2	$\pi/4$	2
-1	-2	$3\pi/4$	2
1	3	$\pi/6$	3
-1	-3	$5\pi/6$	3

En particulier :

- Si l'angle est strictement aigu, $\alpha - \beta \in \Phi$.
- Si l'angle est strictement obtus, $\alpha + \beta \in \Phi$.

Sommaire

Base d'un système de racines

Base d'un système de racines

Définition

Une partie $\Delta \subset \Phi$ est une base de Φ si elle vérifie les conditions suivantes :

Base d'un système de racines

Définition

Une partie $\Delta \subset \Phi$ est une base de Φ si elle vérifie les conditions suivantes :

(i) Δ est une base de E.

Base d'un système de racines

Définition

Une partie $\Delta \subset \Phi$ est une base de Φ si elle vérifie les conditions suivantes :

(i) Δ est une base de E.

(ii) Si $\alpha \in \Phi,$ les coordonnées de α dans Δ sont des entiers de même signe.

Base d'un système de racines

Définition

Une partie $\Delta \subset \Phi$ est une base de Φ si elle vérifie les conditions suivantes :

(i) Δ est une base de E.

(ii) Si $\alpha \in \Phi,$ les coordonnées de α dans Δ sont des entiers de même signe.

Pas d'existence a priori : les angles doivent être obtus.

Base d'un système de racines

Définition

Une partie $\Delta \subset \Phi$ est une base de Φ si elle vérifie les conditions suivantes :

(i) Δ est une base de E.

(ii) Si $\alpha \in \Phi$, les coordonnées de α dans Δ sont des entiers de même signe.

Pas d'existence a priori : les angles doivent être obtus.

Théorème

Tout système de racines admet une base.

Base d'un système de racines

Définition

Une partie $\Delta \subset \Phi$ est une base de Φ si elle vérifie les conditions suivantes :

(i) Δ est une base de E.

(ii) Si $\alpha \in \Phi,$ les coordonnées de α dans Δ sont des entiers de même signe.

Pas d'existence a priori : les angles doivent être obtus.

Théorème

Tout système de racines admet une base.

On sait comment toutes les obtenir !

Comment construire les bases ?

Comment construire les bases ?

- On fixe $v \in E \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} H_\alpha$.

Comment construire les bases ?

- On fixe $v \in E \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} H_\alpha$.
- On pose $\Phi^+ = \{\alpha \in \Phi \mid (\alpha, v) > 0\}$.

Comment construire les bases ?

- On fixe $v \in E \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} H_\alpha$.
- On pose $\Phi^+ = \{\alpha \in \Phi \mid (\alpha, v) > 0\}$.
- La famille $\Delta_v := \{\alpha \in \Phi^+ \mid \nexists \alpha_1, \alpha_2 \in \Phi^+, \alpha = \alpha_1 + \alpha_2\}$ est une base de Φ.

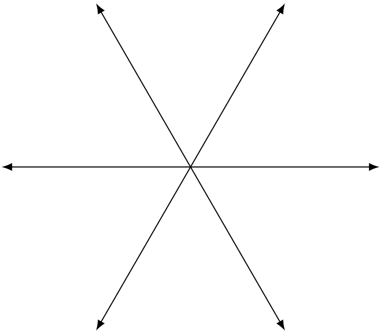
Comment construire les bases ?

- On fixe $v \in E \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} H_\alpha$.
- On pose $\Phi^+ = \{\alpha \in \Phi \mid (\alpha, v) > 0\}$.
- La famille $\Delta_v := \{\alpha \in \Phi^+ \mid \nexists \alpha_1, \alpha_2 \in \Phi^+, \alpha = \alpha_1 + \alpha_2\}$ est une base de Φ.
- Réciproquement, si $\Delta \subset \Phi$ est une base alors $\Delta = \Delta_v$ pour tout $v \in \{u \in E \mid \forall \alpha \in \Delta, (u, \alpha) > 0\}$.

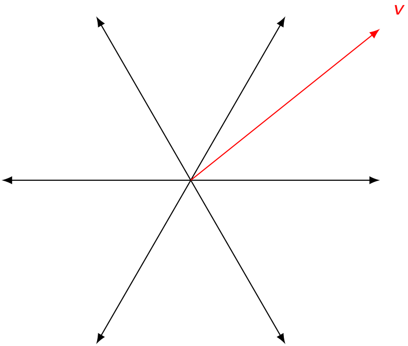
Comment construire les bases ?

- On fixe $v \in E \backslash \bigcup_{\alpha \in \Phi} H_\alpha$.
- On pose $\Phi^+ = \{\alpha \in \Phi \mid (\alpha, v) > 0\}$.
- La famille $\Delta_v := \{\alpha \in \Phi^+ \mid \nexists \alpha_1, \alpha_2 \in \Phi^+, \alpha = \alpha_1 + \alpha_2\}$ est une base de Φ.
- Réciproquement, si $\Delta \subset \Phi$ est une base alors $\Delta = \Delta_v$ pour tout $v \in \{u \in E \mid \forall \alpha \in \Delta, (u, \alpha) > 0\}$.
- Chaque base correspond à une composante connexe (chambre de Weyl) de $E \backslash \bigcup_{\alpha \in \Phi} H_\alpha$.

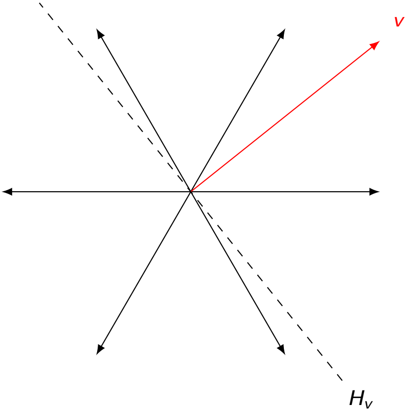
Exemple : le système de racines A_2.



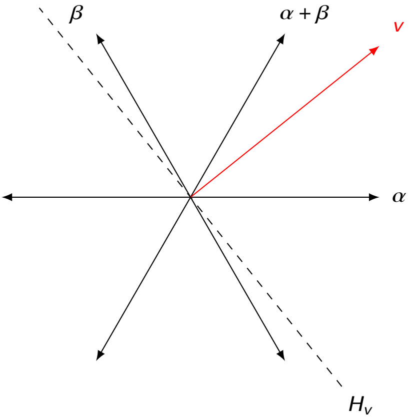
Exemple : le système de racines A_2.



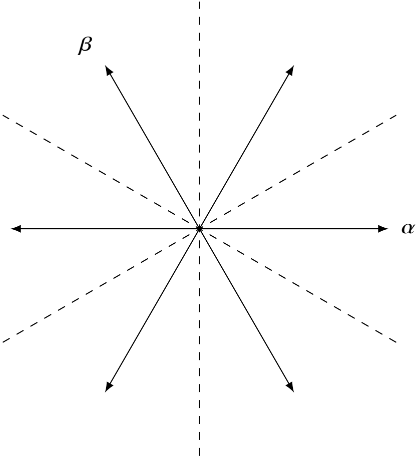
Exemple : le système de racines A_2.



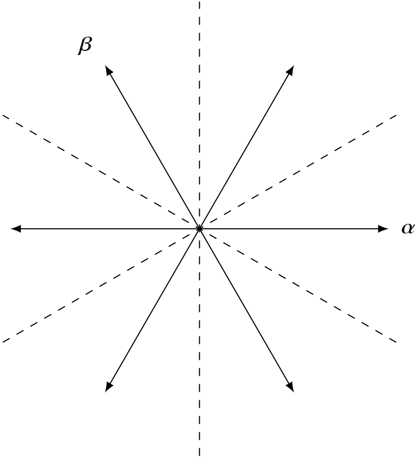
Exemple : le système de racines A_2.



Exemple : le système de racines A_2.



Exemple : le système de racines A_2.



Bijection entre les bases et les chambres de Weyl !

Le groupe de Weyl

Le groupe de Weyl

Définition

On définit le groupe de Weyl de Φ par

$$\mathcal{W} = \langle \sigma_\alpha, \alpha \in \Phi \rangle \subset O(E).$$

Le groupe de Weyl

Définition

On définit le groupe de Weyl de Φ par

$$\mathcal{W} = \langle \sigma_\alpha, \alpha \in \Phi \rangle \subset O(E).$$

- On a $\mathcal{W} \subset \mathfrak{S}(\Phi)$.

Le groupe de Weyl

Définition

On définit le groupe de Weyl de Φ par

$$\mathcal{W} = \langle \sigma_\alpha, \alpha \in \Phi \rangle \subset O(E).$$

- On a $\mathcal{W} \subset \mathfrak{S}(\Phi)$.
- $\mathcal{W}$ n'est pas toujours le groupe entier des symétries de Φ.

Le groupe de Weyl

Définition

On définit le groupe de Weyl de Φ par

$$\mathcal{W} = \langle \sigma_\alpha, \alpha \in \Phi \rangle \subset O(E).$$

- On a $\mathcal{W} \subset \mathfrak{S}(\Phi)$.
- $\mathcal{W}$ n'est pas toujours le groupe entier des symétries de Φ.
- Si Δ est une base de Φ, $\mathcal{W} = \langle \sigma_\alpha, \alpha \in \Delta \rangle$.

Le groupe de Weyl

Définition

On définit le groupe de Weyl de Φ par

$$\mathcal{W} = \langle \sigma_\alpha, \alpha \in \Phi \rangle \subset O(E).$$

- On a $\mathcal{W} \subset \mathfrak{S}(\Phi)$.
- $\mathcal{W}$ n'est pas toujours le groupe entier des symétries de Φ.
- Si Δ est une base de Φ, $\mathcal{W} = \langle \sigma_\alpha, \alpha \in \Delta \rangle$.
- Le groupe de Weyl agit simplement transitivement sur l'ensemble des bases de Φ. En particulier, les entiers de Cartan d'une base ne dépendent pas de la base.

Le groupe de Weyl

Définition

On définit le groupe de Weyl de Φ par

$$\mathcal{W} = \langle \sigma_\alpha, \alpha \in \Phi \rangle \subset O(E).$$

- On a $\mathcal{W} \subset \mathfrak{S}(\Phi)$.
- $\mathcal{W}$ n'est pas toujours le groupe entier des symétries de Φ.
- Si Δ est une base de Φ, $\mathcal{W} = \langle \sigma_\alpha, \alpha \in \Delta \rangle$.
- Le groupe de Weyl agit simplement transitivement sur l'ensemble des bases de Φ. En particulier, les entiers de Cartan d'une base ne dépendent pas de la base.
- L'adhérence d'une chambre de Weyl est un domaine fondamental pour l'action de $\mathcal{W}$ sur E.

Sommaire

Réductibilité

Réductibilité

Définition

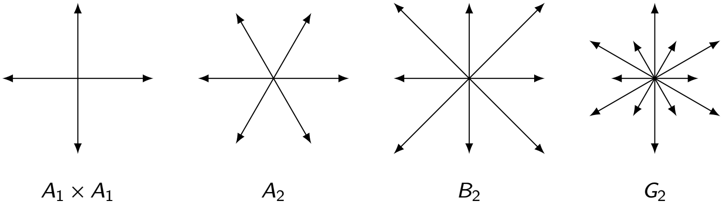
On dit que Φ est réductible si on peut écrire $\Phi = \Phi_1 \sqcup \Phi_2$ avec $\Phi_1 \perp \Phi_2$.

Si Φ n'est pas réductible, on dit que Φ est irréductible.

Réductibilité

Définition

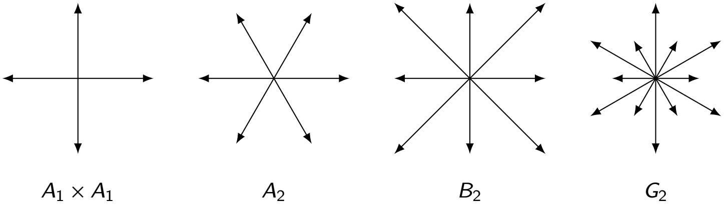
On dit que Φ est réductible si on peut écrire $\Phi = \Phi_1 \sqcup \Phi_2$ avec $\Phi_1 \perp \Phi_2$.
Si Φ n'est pas réductible, on dit que Φ est irréductible.



Réductibilité

Définition

On dit que Φ est réductible si on peut écrire $\Phi = \Phi_1 \sqcup \Phi_2$ avec $\Phi_1 \perp \Phi_2$.
Si Φ n'est pas réductible, on dit que Φ est irréductible.

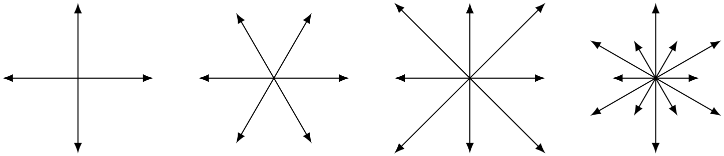


- $A_1 \times A_1$ est réductible.

Réductibilité

Définition

On dit que Φ est réductible si on peut écrire $\Phi = \Phi_1 \sqcup \Phi_2$ avec $\Phi_1 \perp \Phi_2$.
Si Φ n'est pas réductible, on dit que Φ est irréductible.



$A_1 \times A_1$ A_2 B_2 G_2

- $A_1 \times A_1$ est réductible.
- A_1, A_2, B_2, G_2 sont irréductibles.

Conséquences de l'irréductibilité

Soit Φ un système de racines irréductible et Δ une base de Φ.

Conséquences de l'irréductibilité

Soit Φ un système de racines irréductible et Δ une base de Φ.

- Il y a au plus deux longueurs de racines.

Conséquences de l'irréductibilité

Soit Φ un système de racines irréductible et Δ une base de Φ.

- Il y a au plus deux longueurs de racines.
- Les $\mathcal{W}$-orbites de Φ sont paramétrées par les longueurs.

Conséquences de l'irréductibilité

Soit Φ un système de racines irréductible et Δ une base de Φ.

- Il y a au plus deux longueurs de racines.
- Les $\mathcal{W}$-orbites de Φ sont paramétrées par les longueurs.
- Φ admet une unique racine maximale relativement à l'ordre lexicographique pour Δ. Elle est longue.

Diagramme de Dynkin

Fixons Φ un système de racine de rang ℓ et $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ une base de Φ.

Diagramme de Dynkin

Fixons Φ un système de racine de rang ℓ et $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ une base de Φ.

Définition

On associe à Φ le diagramme D_Φ suivant, appelé diagramme de Dynkin :

Diagramme de Dynkin

Fixons Φ un système de racine de rang ℓ et $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ une base de Φ.

Définition

On associe à Φ le diagramme D_Φ suivant, appelé diagramme de Dynkin :

- D_Φ possède ℓ sommets appelés $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$.

Diagramme de Dynkin

Fixons Φ un système de racine de rang ℓ et $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ une base de Φ.

Définition

On associe à Φ le diagramme D_Φ suivant, appelé diagramme de Dynkin :

- D_Φ possède ℓ sommets appelés $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$.
- Si $i \neq j$, le sommet α_i est relié à α_j par $\langle \alpha_i \,, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j \,, \alpha_i \rangle$ arêtes.

Diagramme de Dynkin

Fixons Φ un système de racine de rang ℓ et $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ une base de Φ.

Définition

On associe à Φ le diagramme D_Φ suivant, appelé diagramme de Dynkin :

- D_Φ possède ℓ sommets appelés $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$.
- Si $i \neq j$, le sommet α_i est relié à α_j par $\langle \alpha_i \, , \, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j \, , \, \alpha_i \rangle$ arêtes.
- Si $i \neq j$ et $\|\alpha_i\| > \|\alpha_j\|$, on ajoute le symbole $>$ en direction de α_j sur les arêtes reliant α_i et α_j.

Diagramme de Dynkin

Fixons Φ un système de racine de rang ℓ et $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ une base de Φ.

Définition

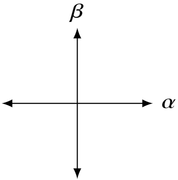
On associe à Φ le diagramme D_Φ suivant, appelé diagramme de Dynkin :

- D_Φ possède ℓ sommets appelés $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$.
- Si $i \neq j$, le sommet α_i est relié à α_j par $\langle \alpha_i , \alpha_j \rangle \langle \alpha_j , \alpha_i \rangle$ arêtes.
- Si $i \neq j$ et $\|\alpha_i\| > \|\alpha_j\|$, on ajoute le symbole $>$ en direction de α_j sur les arêtes reliant α_i et α_j.

Le diagramme D_Φ ne dépend pas de la base choisie !

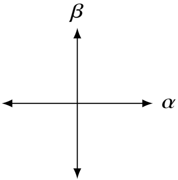
Exemples de diagrammes de Dynkin

Exemples de diagrammes de Dynkin



$A_1 \times A_1$

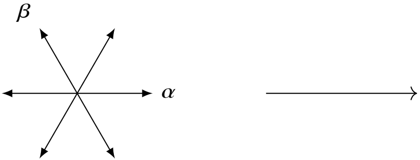
Exemples de diagrammes de Dynkin



$A_1 \times A_1$

Exemples de diagrammes de Dynkin

$A_1 \times A_1$



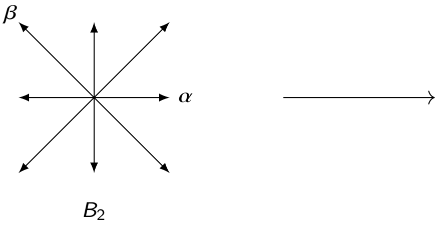
A_2

Exemples de diagrammes de Dynkin

$A_1 \times A_1$

A_2

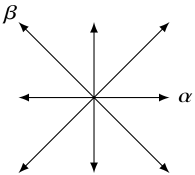
Exemples de diagrammes de Dynkin



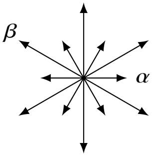
Exemples de diagrammes de Dynkin

B_2

Exemples de diagrammes de Dynkin



B_2

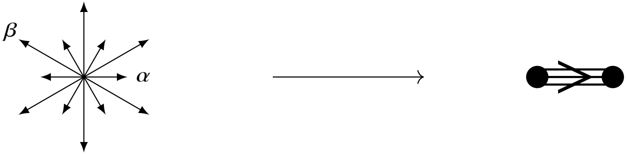


$\longrightarrow$

G_2

Exemples de diagrammes de Dynkin

B_2



G_2

Lien avec le système de racines

Soit Φ un système de racines et D_Φ son diagramme de Dynkin.

Lien avec le système de racines

Soit Φ un système de racines et D_Φ son diagramme de Dynkin.

- La connaissance de D_Φ permet de retrouver Φ.

Lien avec le système de racines

Soit Φ un système de racines et D_Φ son diagramme de Dynkin.

- La connaissance de D_Φ permet de retrouver Φ.
- Φ est irréductible si et seulement si D_Φ est connexe.

Lien avec le système de racines

Soit Φ un système de racines et D_Φ son diagramme de Dynkin.

- La connaissance de D_Φ permet de retrouver Φ.
- Φ est irréductible si et seulement si D_Φ est connexe.

Mieux :

Théorème

Φ se décompose de manière unique comme une union de systèmes de racines irréductibles deux-à-deux orthogonaux.

Lien avec le système de racines

Soit Φ un système de racines et D_Φ son diagramme de Dynkin.

- La connaissance de D_Φ permet de retrouver Φ.
- Φ est irréductible si et seulement si D_Φ est connexe.

Mieux :

Théorème

Φ se décompose de manière unique comme une union de systèmes de racines irréductibles deux-à-deux orthogonaux.

Pour classifier les système de racines, il suffit donc de classifier les diagrammes de Dynkin connexes.

Classification des diagrammes de Dynkin connexes

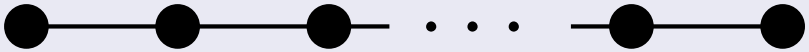
Théorème

Si Φ *est un système de racines irréductible de rang* ℓ, D_{Φ} *a une des formes suivantes :*

Classification des diagrammes de Dynkin connexes

Théorème

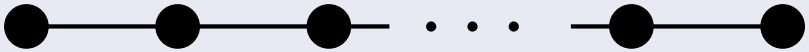
Si Φ est un système de racines irréductible de rang ℓ, D_Φ a une des formes suivantes :

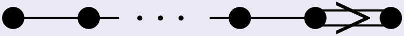
$A_\ell \quad (\ell \geqslant 1)$: 

Classification des diagrammes de Dynkin connexes

Théorème

Si Φ est un système de racines irréductible de rang ℓ, D_Φ a une des formes suivantes :

$A_\ell \quad (\ell \geqslant 1)$: 

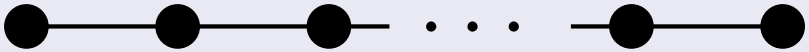
$B_\ell \quad (\ell \geqslant 2)$: 

Classification des diagrammes de Dynkin connexes

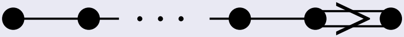
Théorème

Si Φ est un système de racines irréductible de rang ℓ, D_Φ a une des formes suivantes :

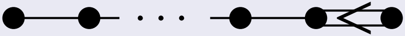
$A_\ell \quad (\ell \geqslant 1)$:



$B_\ell \quad (\ell \geqslant 2)$:



$C_\ell \quad (\ell \geqslant 3)$:

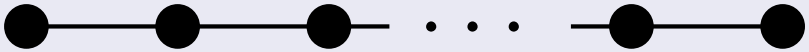


Classification des diagrammes de Dynkin connexes

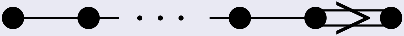
Théorème

Si Φ est un système de racines irréductible de rang ℓ, D_Φ a une des formes suivantes :

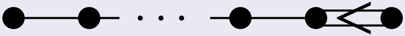
$A_\ell \quad (\ell \geqslant 1)$:



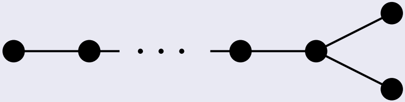
$B_\ell \quad (\ell \geqslant 2)$:



$C_\ell \quad (\ell \geqslant 3)$:



$D_\ell \quad (\ell \geqslant 4)$:

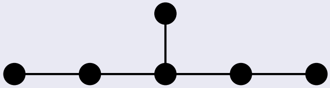


Classification des diagrammes de Dynkin connexes

Théorème

Si Φ est un système de racines irréductible de rang ℓ, D_Φ a une des formes suivantes :

E_6 :

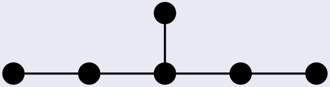


Classification des diagrammes de Dynkin connexes

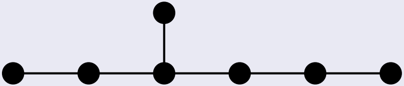
Théorème

Si Φ est un système de racines irréductible de rang ℓ, D_Φ a une des formes suivantes :

E_6 :



E_7 :

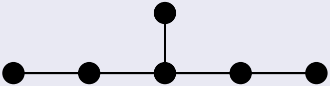


Classification des diagrammes de Dynkin connexes

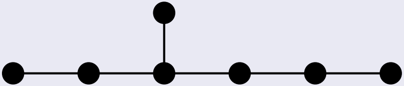
Théorème

Si Φ est un système de racines irréductible de rang ℓ, D_Φ a une des formes suivantes :

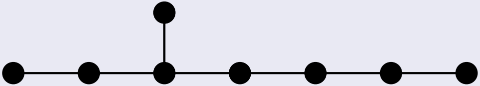
E_6 :



E_7 :



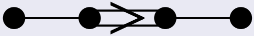
E_8 :



Classification des diagrammes de Dynkin connexes

Théorème

Si Φ est un système de racines irréductible de rang ℓ, D_Φ a une des formes suivantes :

F_4 : 

Classification des diagrammes de Dynkin connexes

Théorème

Si Φ est un système de racines irréductible de rang ℓ, D_Φ a une des formes suivantes :

F_4 :

G_2 :

Classification des diagrammes de Dynkin connexes

Théorème

Si Φ est un système de racines irréductible de rang ℓ, D_Φ a une des formes suivantes :

F_4 :

G_2 :

Tous ces diagrammes correspondent à un système de racines.