Classification des algèbres de Lie semi-simples

Valentin Massicot

Université de Reims Champagne-Ardenne

4 décembre 2024

Sommaire

Sommaire

L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2$

On considère

$$\mathfrak{sl}_2 = \{A \in \mathfrak{gl}_2 \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\}$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2$

On considère

$$\begin{aligned}\mathfrak{sl}_2 &= \{A \in \mathfrak{gl}_2 \mid \operatorname{Tr}(A) = 0\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{K}\right\}\end{aligned}$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2$

On considère

$$\begin{aligned}\mathfrak{sl}_2 &= \{A \in \mathfrak{gl}_2 \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{K}\right\} \\ &= \mathrm{Vect}(H, X, Y)\end{aligned}$$

où

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2$

On considère

$$\begin{aligned}\mathfrak{sl}_2 &= \{A \in \mathfrak{gl}_2 \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{K} \right\} \\ &= \mathrm{Vect}(H, X, Y)\end{aligned}$$

où

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H.$$

Représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2$

Représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2$

Soit $\rho : \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{gl}(V)$ irréductible de dimension finie.

Représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2$

Soit $\rho : \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{gl}(V)$ irréductible de dimension finie.
Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, notons $V_\lambda = E_\lambda(\rho(H))$.

Représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2$

Soit $\rho : \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{gl}(V)$ irréductible de dimension finie.
Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, notons $V_\lambda = E_\lambda(\rho(H))$.
Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(\rho(H))$ et $v \in V_\lambda$, on a

$$HXv = XHv + 2Xv = (\lambda + 2)Xv$$

$$HYv = YHv - 2Yv = (\lambda - 2)Yv$$

Représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2$

Soit $\rho : \mathfrak{sl}_2 \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ irréductible de dimension finie.
Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, notons $V_\lambda = E_\lambda(\rho(H))$.
Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(\rho(H))$ et $v \in V_\lambda$, on a

$$HXv = XHv + 2Xv = (\lambda + 2)Xv$$

$$HYv = YHv - 2Yv = (\lambda - 2)Yv$$

donc $Xv \in V_{\lambda+2}$ et $Yv \in V_{\lambda-2}$.

Représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2$

Soit $\rho : \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{gl}(V)$ irréductible de dimension finie.
Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, notons $V_\lambda = E_\lambda(\rho(H))$.
Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(\rho(H))$ et $v \in V_\lambda$, on a

$$HXv = XHv + 2Xv = (\lambda + 2)Xv$$

$$HYv = YHv - 2Yv = (\lambda - 2)Yv$$

donc $Xv \in V_{\lambda+2}$ et $Yv \in V_{\lambda-2}$.
Par irréductibilité $V = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} V_{\lambda+2k}$ et $\rho(H)$ est diagonalisable.

Représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2$

$$\begin{tikzcd}
\cdots & V_{\lambda-2k-2} \arrow[l] \arrow[loop below, "H"] \arrow[r, bend left, "X"] & V_{\lambda-2k} \arrow[l, "Y"] \arrow[loop below, "H"] \arrow[r, bend left, "X"] & V_{\lambda-2k+2} \arrow[l, "Y"] \arrow[loop below, "H"] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2$

$$\begin{tikzcd} \cdots & V_{\lambda-2k-2} \arrow[l] \arrow["H"', loop below] \arrow[r, bend left, "X"] & V_{\lambda-2k} \arrow[l, "Y"] \arrow["H"', loop below] \arrow[r, bend left, "X"] & V_{\lambda-2k+2} \arrow[l, "Y"] \arrow["H"', loop below] & \cdots \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Par hypothèse $\dim V < +\infty$ donc la chaîne est finie.

Représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2$

$$\begin{tikzcd}
\cdots & V_{\lambda-2k-2} \arrow[l] \arrow[r, bend left, "X"] \arrow[loop below, "H"] & V_{\lambda-2k} \arrow[l, "Y"] \arrow[r, bend left, "X"] \arrow[loop below, "H"] & V_{\lambda-2k+2} \arrow[l, "Y"] \arrow[loop below, "H"] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Par hypothèse $\dim V < +\infty$ donc la chaîne est finie.
Si $n \in \mathrm{Sp}(\rho(H))$ est maximale et $v \in V_n \backslash \{0\}$, on a

$$XY^m v = m(n-m+1)Y^{m-1}v, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

Représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2$

$$\begin{tikzcd}
\cdots & V_{\lambda-2k-2} \arrow[l] \arrow[loop below, "H"] \arrow[r, bend left, "X"] & V_{\lambda-2k} \arrow[l, "Y"] \arrow[loop below, "H"] \arrow[r, bend left, "X"] & V_{\lambda-2k+2} \arrow[l, "Y"] \arrow[loop below, "H"] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Par hypothèse $\dim V < +\infty$ donc la chaîne est finie.
Si $n \in \mathrm{Sp}(\rho(H))$ est maximale et $v \in V_n \backslash \{0\}$, on a

$$XY^m v = m(n-m+1)Y^{m-1}v, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

Pour $m = \max\{k \in \mathbb{N} \mid Y^k v \neq 0\}$,

$$0 = XY^{m+1}v = (m+1)(n-m)Y^m v.$$

Représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2$

$$\begin{tikzcd}
\cdots & V_{\lambda-2k-2} \arrow[l] \arrow[loop below, "H"] \arrow[r, bend left, "X"] & V_{\lambda-2k} \arrow[l, "Y"] \arrow[loop below, "H"] \arrow[r, bend left, "X"] & V_{\lambda-2k+2} \arrow[l, "Y"] \arrow[loop below, "H"] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Par hypothèse $\dim V < +\infty$ donc la chaîne est finie.
Si $n \in \mathrm{Sp}(\rho(H))$ est maximale et $v \in V_n \setminus \{0\}$, on a

$$XY^m v = m(n-m+1)Y^{m-1}v, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

Pour $m = \max\{k \in \mathbb{N} \mid Y^k v \neq 0\}$,

$$0 = XY^{m+1}v = (m+1)(n-m)Y^m v.$$

En particulier, $n \in \mathbb{N}$ et $(v, Yv, \ldots Y^n v)$ est une base de V.

Représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2$

Théorème

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique représentation irréductible $Z(n)$ de $\mathfrak{sl}_2$ de dimension $n+1$.
Si $n \in \mathbb{N}$, $Z(n)$ est obtenue avec les opérateurs différentiels

$$X = -z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}, \quad Y = -z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}, \quad H = -z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$$

sur les polynômes homogènes de $\mathbb{K}[z_1, z_2]$ de degré $\leqslant n$.

Représentation de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2$

Représentation de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2$

Théorème

Toute représentation de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2$ est complètement réductible.

Représentation de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2$

Théorème

Toute représentation de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2$ est complètement réductible.

Si V est un $\mathfrak{sl}_2$-module, $V = Z(n_1) \oplus \cdots \oplus Z(n_s)$.

Représentation de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2$

Théorème

Toute représentation de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2$ est complètement réductible.

Si V est un $\mathfrak{sl}_2$-module, $V = Z(n_1) \oplus \cdots \oplus Z(n_s)$.
Deux cas possibles :

Représentation de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2$

Théorème

Toute représentation de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2$ est complètement réductible.

Si V est un $\mathfrak{sl}_2$-module, $V = Z(n_1) \oplus \cdots \oplus Z(n_s)$.
Deux cas possibles :

$$Z(2k) \qquad \underset{-2k}{\bullet} \quad \cdots \quad \underset{-2}{\bullet} \quad \underset{0}{\bullet} \quad \underset{2}{\bullet} \quad \cdots \quad \underset{2k}{\bullet}$$

Représentation de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2$

Théorème

Toute représentation de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2$ est complètement réductible.

Si V est un $\mathfrak{sl}_2$-module, $V = Z(n_1) \oplus \cdots \oplus Z(n_s)$.
Deux cas possibles :

$$
\begin{array}{lccccccc}
Z(2k) & \underset{-2k}{\bullet} & \cdots & \underset{-2}{\bullet} & \underset{0}{\bullet} & \underset{2}{\bullet} & \cdots & \underset{2k}{\bullet} \\
Z(2k+1) & \underset{-2k-1}{\bullet} & \cdots & \underset{-1}{\bullet} & \underset{1}{\bullet} & \underset{3}{\bullet} & \cdots & \underset{2k+1}{\bullet}
\end{array}
$$

Représentation de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2$

Théorème

Toute représentation de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2$ est complètement réductible.

Si V est un $\mathfrak{sl}_2$-module, $V = Z(n_1) \oplus \cdots \oplus Z(n_s)$.
Deux cas possibles :

$$\begin{array}{cccccccc}
Z(2k) & \underset{-2k}{\bullet} & \cdots & \underset{-2}{\bullet} & \underset{0}{\bullet} & \underset{2}{\bullet} & \cdots & \underset{2k}{\bullet} \\
Z(2k+1) & \underset{-2k-1}{\bullet} & \cdots & \underset{-1}{\bullet} & \underset{1}{\bullet} & \underset{3}{\bullet} & \cdots & \underset{2k+1}{\bullet}
\end{array}$$

Chaque $Z(n_i)$ contribue soit à V_0 soit à V_1 et une seule fois :

$$n_s = \dim V_0 + \dim V_1.$$

Représentation de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2$

Théorème

Toute représentation de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2$ est complètement réductible.

Si V est un $\mathfrak{sl}_2$-module, $V = Z(n_1) \oplus \cdots \oplus Z(n_s)$.
Deux cas possibles :

$$
\begin{array}{cccccccc}
Z(2k) & \underset{-2k}{\bullet} & \cdots & \underset{-2}{\bullet} & \underset{0}{\bullet} & \underset{2}{\bullet} & \cdots & \underset{2k}{\bullet} \\
Z(2k+1) & \underset{-2k-1}{\bullet} & \cdots & \underset{-1}{\bullet} & \underset{1}{\bullet} & \underset{3}{\bullet} & \cdots & \underset{2k+1}{\bullet}
\end{array}
$$

Chaque $Z(n_i)$ contribue soit à V_0 soit à V_1 et une seule fois :

$$n_s = \dim V_0 + \dim V_1.$$

En particulier, V est irréductible $\iff \dim V_0 + \dim V_1 = 1.$

Sommaire

Définition et caractérisation

Définition et caractérisation

- $\mathbb{K}$: corps algébriquement clos avec $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$.

Définition et caractérisation

- $\mathbb{K}$: corps algébriquement clos avec $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$.
- $\mathfrak{g}$: algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbb{K}$.

Définition et caractérisation

- $\mathbb{K}$: corps algébriquement clos avec $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$.
- $\mathfrak{g}$: algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbb{K}$.
- κ : forme de Killing définie par $\kappa(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y)$.

Définition et caractérisation

- $\mathbb{K}$: corps algébriquement clos avec $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$.
- $\mathfrak{g}$: algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbb{K}$.
- κ : forme de Killing définie par $\kappa(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y)$.

Définition

$\mathfrak{g}$ est simple si $\mathfrak{g}$ n'admet pas d'idéal non trivial et si son centre est trivial.
$\mathfrak{g}$ est semi-simple si $\mathfrak{g}$ est somme d'idéaux simples.

Définition et caractérisation

- $\mathbb{K}$: corps algébriquement clos avec $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$.
- $\mathfrak{g}$: algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbb{K}$.
- κ : forme de Killing définie par $\kappa(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y)$.

Définition

$\mathfrak{g}$ est simple si $\mathfrak{g}$ n'admet pas d'idéal non trivial et si son centre est trivial.
$\mathfrak{g}$ est semi-simple si $\mathfrak{g}$ est somme d'idéaux simples.

$\mathfrak{g}$ semi-simple $\iff$ $\mathfrak{g}$ n'admet pas d'idéal abélien non trivial

Définition et caractérisation

- $\mathbb{K}$: corps algébriquement clos avec $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$.
- $\mathfrak{g}$: algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbb{K}$.
- κ : forme de Killing définie par $\kappa(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y)$.

Définition

$\mathfrak{g}$ est simple si $\mathfrak{g}$ n'admet pas d'idéal non trivial et si son centre est trivial.
$\mathfrak{g}$ est semi-simple si $\mathfrak{g}$ est somme d'idéaux simples.

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \text{ semi-simple} &\iff \mathfrak{g} \text{ n'admet pas d'idéal abélien non trivial} \\ &\iff \mathfrak{g} \text{ n'admet pas d'idéal résoluble non trivial} \end{aligned}$$

Définition et caractérisation

- $\mathbb{K}$: corps algébriquement clos avec $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$.
- $\mathfrak{g}$: algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbb{K}$.
- κ : forme de Killing définie par $\kappa(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y)$.

Définition

$\mathfrak{g}$ est simple si $\mathfrak{g}$ n'admet pas d'idéal non trivial et si son centre est trivial.
$\mathfrak{g}$ est semi-simple si $\mathfrak{g}$ est somme d'idéaux simples.

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \text{ semi-simple} \quad &\iff \mathfrak{g} \text{ n'admet pas d'idéal abélien non trivial} \\ &\iff \mathfrak{g} \text{ n'admet pas d'idéal résoluble non trivial} \\ &\iff \kappa \text{ est non dégénérée (critère de Cartan)} \end{aligned}$$

Sous-algèbre de Cartan

Sous-algèbre de Cartan

Définition

On dit qu'une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ est torale si elle est composée d'éléments ad-diagonalisables.
Une sous-algèbre torale maximale est appelée sous-algèbre de Cartan (CSA).

Sous-algèbre de Cartan

Définition

On dit qu'une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ est torale si elle est composée d'éléments ad-diagonalisables.
Une sous-algèbre torale maximale est appelée sous-algèbre de Cartan (CSA).

- Une sous-algèbre torale est abélienne donc co-ad-diagonalisable.

Sous-algèbre de Cartan

Définition

On dit qu'une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ est torale si elle est composée d'éléments ad-diagonalisables.
Une sous-algèbre torale maximale est appelée sous-algèbre de Cartan (CSA).

- Une sous-algèbre torale est abélienne donc co-ad-diagonalisable.
- Une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ est auto-centralisante :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}} \mathfrak{g}_\alpha .$$

Sous-algèbre de Cartan

Définition

On dit qu'une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ est torale si elle est composée d'éléments ad-diagonalisables.
Une sous-algèbre torale maximale est appelée sous-algèbre de Cartan (CSA).

- Une sous-algèbre torale est abélienne donc co-ad-diagonalisable.
- Une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ est auto-centralisante :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}} \mathfrak{g}_\alpha .$$

- $Z(\mathfrak{g}) = \{0\}$ donc $\langle \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\} \rangle = \mathfrak{h}^*$.

Décomposition en espaces de racines

Décomposition en espaces de racines

On fixe $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ CSA et on note $\Phi = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \backslash \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}$.

Décomposition en espaces de racines

On fixe $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ CSA et on note $\Phi = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \backslash \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}$.
Si $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $x_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$, $h \in \mathfrak{h}$,

$$\mathrm{ad}_h([x_\alpha, x_\beta]) = [\mathrm{ad}_h x_\alpha, x_\beta] + [x_\alpha, \mathrm{ad}_h x_\beta] = (\alpha + \beta)[x_\alpha, x_\beta]$$

Décomposition en espaces de racines

On fixe $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ CSA et on note $\Phi = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \backslash \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}$.
Si $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $x_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$, $h \in \mathfrak{h}$,

$$\mathrm{ad}_h([x_\alpha, x_\beta]) = [\mathrm{ad}_h x_\alpha, x_\beta] + [x_\alpha, \mathrm{ad}_h x_\beta] = (\alpha + \beta)[x_\alpha, x_\beta]$$

donc $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

Décomposition en espaces de racines

On fixe $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ CSA et on note $\Phi = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \backslash \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}$.
Si $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $x_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$, $h \in \mathfrak{h}$,

$$\mathrm{ad}_h([x_\alpha, x_\beta]) = [\mathrm{ad}_h x_\alpha, x_\beta] + [x_\alpha, \mathrm{ad}_h x_\beta] = (\alpha + \beta)[x_\alpha, x_\beta]$$

donc $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.
En particulier, si $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, x est ad-nilpotent.

Décomposition en espaces de racines

On fixe $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ CSA et on note $\Phi = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \backslash \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}$.
Si $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $x_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$, $h \in \mathfrak{h}$,

$$\mathrm{ad}_h([x_\alpha, x_\beta]) = [\mathrm{ad}_h x_\alpha, x_\beta] + [x_\alpha, \mathrm{ad}_h x_\beta] = (\alpha + \beta)[x_\alpha, x_\beta]$$

donc $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.
En particulier, si $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, x est ad-nilpotent.
Similairement, si $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $x_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$, $h \in \mathfrak{h}$, on a

$$\alpha(h)\kappa(x_\alpha, x_\beta) = \kappa(\mathrm{ad}_h x_\alpha, x_\beta) = -\kappa(x_\alpha, \mathrm{ad}_h x_\beta) = -\beta(h)\kappa(x_\alpha, x_\beta)$$

Décomposition en espaces de racines

On fixe $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ CSA et on note $\Phi = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \backslash \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}$.
Si $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $x_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$, $h \in \mathfrak{h}$,

$$\mathrm{ad}_h([x_\alpha, x_\beta]) = [\mathrm{ad}_h x_\alpha, x_\beta] + [x_\alpha, \mathrm{ad}_h x_\beta] = (\alpha + \beta)[x_\alpha, x_\beta]$$

donc $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.
En particulier, si $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, x est ad-nilpotent.
Similairement, si $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $x_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$, $h \in \mathfrak{h}$, on a

$$\alpha(h)\kappa(x_\alpha, x_\beta) = \kappa(\mathrm{ad}_h x_\alpha, x_\beta) = -\kappa(x_\alpha, \mathrm{ad}_h x_\beta) = -\beta(h)\kappa(x_\alpha, x_\beta)$$

donc si $\alpha + \beta \neq 0$, $\mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_\beta$.

Décomposition en espaces de racines

On fixe $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ CSA et on note $\Phi = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \backslash \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}$.
Si $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $x_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$, $h \in \mathfrak{h}$,

$$\mathrm{ad}_h([x_\alpha, x_\beta]) = [\mathrm{ad}_h x_\alpha, x_\beta] + [x_\alpha, \mathrm{ad}_h x_\beta] = (\alpha + \beta)[x_\alpha, x_\beta]$$

donc $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.
En particulier, si $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, x est ad-nilpotent.
Similairement, si $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $x_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$, $h \in \mathfrak{h}$, on a

$$\alpha(h)\kappa(x_\alpha, x_\beta) = \kappa(\mathrm{ad}_h x_\alpha, x_\beta) = -\kappa(x_\alpha, \mathrm{ad}_h x_\beta) = -\beta(h)\kappa(x_\alpha, x_\beta)$$

donc si $\alpha + \beta \neq 0$, $\mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_\beta$.
En particulier, $\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{h} = \{0\}$ donc $\kappa_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ est non-dégénérée et si $\alpha \in \Phi$, $-\alpha \in \Phi$.

Décomposition en espaces de racines

Si $\alpha \in \Phi$, on pose $t_\alpha \in \mathfrak{h}$ tel que $\alpha = \kappa(t_\alpha, \cdot)$.

Décomposition en espaces de racines

Si $\alpha \in \Phi$, on pose $t_\alpha \in \mathfrak{h}$ tel que $\alpha = \kappa(t_\alpha, \cdot)$.
Si $h \in \mathfrak{h}$, $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, on a

$$\kappa(h, [x_\alpha, y_\alpha]) = \kappa([h, x_\alpha], y_\alpha) = \alpha(h)\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = \kappa(\kappa(x_\alpha, y_\alpha)t_\alpha, h)$$

Décomposition en espaces de racines

Si $\alpha \in \Phi$, on pose $t_\alpha \in \mathfrak{h}$ tel que $\alpha = \kappa(t_\alpha, \cdot)$.
Si $h \in \mathfrak{h}$, $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, on a

$$\kappa(h, [x_\alpha, y_\alpha]) = \kappa([h, x_\alpha], y_\alpha) = \alpha(h)\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = \kappa(\kappa(x_\alpha, y_\alpha)t_\alpha, h)$$

donc $[x_\alpha, y_\alpha] = \kappa(x_\alpha, y_\alpha)t_\alpha$ (car $[x_\alpha, y_\alpha] \in \mathfrak{g}_{\alpha-\alpha} = \mathfrak{h}$).

Décomposition en espaces de racines

Si $\alpha \in \Phi$, on pose $t_\alpha \in \mathfrak{h}$ tel que $\alpha = \kappa(t_\alpha, \cdot)$.
Si $h \in \mathfrak{h}$, $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, on a

$$\kappa(h, [x_\alpha, y_\alpha]) = \kappa([h, x_\alpha], y_\alpha) = \alpha(h)\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = \kappa(\kappa(x_\alpha, y_\alpha)t_\alpha, h)$$

donc $[x_\alpha, y_\alpha] = \kappa(x_\alpha, y_\alpha)t_\alpha$ (car $[x_\alpha, y_\alpha] \in \mathfrak{g}_{\alpha-\alpha} = \mathfrak{h}$).
Si $\alpha \in \Phi$, on peut trouver $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ tels que

$$\mathfrak{s}_\alpha := \langle x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha \rangle \simeq \mathfrak{sl}_2.$$

Décomposition en espaces de racines

Si $\alpha \in \Phi$, on pose $t_\alpha \in \mathfrak{h}$ tel que $\alpha = \kappa(t_\alpha, \cdot)$.
Si $h \in \mathfrak{h}$, $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, on a

$$\kappa(h, [x_\alpha, y_\alpha]) = \kappa([h, x_\alpha], y_\alpha) = \alpha(h)\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = \kappa(\kappa(x_\alpha, y_\alpha)t_\alpha, h)$$

donc $[x_\alpha, y_\alpha] = \kappa(x_\alpha, y_\alpha)t_\alpha$ (car $[x_\alpha, y_\alpha] \in \mathfrak{g}_{\alpha-\alpha} = \mathfrak{h}$).
Si $\alpha \in \Phi$, on peut trouver $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ tels que

$$\mathfrak{s}_\alpha := \langle x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha \rangle \simeq \mathfrak{sl}_2.$$

Mieux : $h_\alpha = \dfrac{2}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)} t_\alpha$ et $x_\alpha \neq 0$ détermine y_α.

Système de racines de $\mathfrak{g}$

Système de racines de $\mathfrak{g}$

Idée clef : faire agir $\mathfrak{s}_\alpha$ sur des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$.

Système de racines de $\mathfrak{g}$

Idée clef : faire agir $\mathfrak{s}_\alpha$ sur des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$.

Sur $\mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\substack{c \in \mathbb{K}^* \\ c\alpha \in \Phi}} \mathfrak{g}_{c\alpha}$, on obtient :

Système de racines de $\mathfrak{g}$

Idée clef : faire agir $\mathfrak{s}_\alpha$ sur des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$.

Sur $\mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\substack{c \in \mathbb{K}^* \\ c\alpha \in \Phi}} \mathfrak{g}_{c\alpha}$, on obtient :

- $\mathbb{K}^*\alpha \cap \Phi = \{\pm\alpha\}$,

Système de racines de $\mathfrak{g}$

Idée clef : faire agir $\mathfrak{s}_\alpha$ sur des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$.

Sur $\mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\substack{c \in \mathbb{K}^* \\ c\alpha \in \Phi}} \mathfrak{g}_{c\alpha}$, on obtient :

- $\mathbb{K}^*\alpha \cap \Phi = \{\pm\alpha\}$,
- $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ (donc $\mathfrak{s}_\alpha = \mathbb{K}t_\alpha \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$).

Système de racines de $\mathfrak{g}$

Idée clef : faire agir $\mathfrak{s}_\alpha$ sur des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$.

Sur $\mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\substack{c \in \mathbb{K}^* \\ c\alpha \in \Phi}} \mathfrak{g}_{c\alpha}$, on obtient :

- $\mathbb{K}^*\alpha \cap \Phi = \{\pm\alpha\}$,
- $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ (donc $\mathfrak{s}_\alpha = \mathbb{K}t_\alpha \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$).

Sur $\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}$, on obtient :

Système de racines de $\mathfrak{g}$

Idée clef : faire agir $\mathfrak{s}_\alpha$ sur des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$.

Sur $\mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\substack{c \in \mathbb{K}^* \\ c\alpha \in \Phi}} \mathfrak{g}_{c\alpha}$, on obtient :

- $\mathbb{K}^*\alpha \cap \Phi = \{\pm\alpha\}$,
- $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ (donc $\mathfrak{s}_\alpha = \mathbb{K}t_\alpha \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$).

Sur $\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta + k\alpha}$, on obtient :

- $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$,

Système de racines de $\mathfrak{g}$

Idée clef : faire agir $\mathfrak{s}_\alpha$ sur des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$.

Sur $\mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\substack{c \in \mathbb{K}^* \\ c\alpha \in \Phi}} \mathfrak{g}_{c\alpha}$, on obtient :

- $\mathbb{K}^*\alpha \cap \Phi = \{\pm\alpha\}$,
- $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ (donc $\mathfrak{s}_\alpha = \mathbb{K}t_\alpha \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$).

Sur $\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta + k\alpha}$, on obtient :

- $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$,
- $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Phi$.

Système de racines de $\mathfrak{g}$

Système de racines de $\mathfrak{g}$

On munit $\mathfrak{h}^*$ de $(\alpha, \beta) = \kappa(t_\alpha, t_\beta)$.

Système de racines de $\mathfrak{g}$

On munit $\mathfrak{h}^*$ de $(\alpha, \beta) = \kappa(t_\alpha, t_\beta)$. En particulier :

$$\alpha(h_\beta) = \kappa(t_\alpha, h_\beta) = \kappa\left(t_\alpha, \frac{2}{\kappa(t_\beta, t_\beta)} t_\beta\right) = 2\frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \mathbb{Z}.$$

Système de racines de $\mathfrak{g}$

On munit $\mathfrak{h}^*$ de $(\alpha, \beta) = \kappa(t_\alpha, t_\beta)$. En particulier :

$$\alpha(h_\beta) = \kappa(t_\alpha, h_\beta) = \kappa\left(t_\alpha, \frac{2}{\kappa(t_\beta, t_\beta)} t_\beta\right) = 2\frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \mathbb{Z}.$$

On fixe une base $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ de $\mathfrak{h}^*$ composée de racines.

Système de racines de $\mathfrak{g}$

On munit $\mathfrak{h}^*$ de $(\alpha, \beta) = \kappa(t_\alpha, t_\beta)$. En particulier :

$$\alpha(h_\beta) = \kappa(t_\alpha, h_\beta) = \kappa\left(t_\alpha, \frac{2}{\kappa(t_\beta, t_\beta)} t_\beta\right) = 2\frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \mathbb{Z}.$$

On fixe une base $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$ de $\mathfrak{h}^*$ composée de racines.

Si $\alpha = \sum_{k=1}^{\ell} a_k \alpha_k \in \Phi$, on a

$$2\frac{(\alpha, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = \sum_{k=1}^{\ell} 2\frac{(\alpha_k, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} a_k$$

Système de racines de $\mathfrak{g}$

On munit $\mathfrak{h}^*$ de $(\alpha, \beta) = \kappa(t_\alpha, t_\beta)$. En particulier :

$$\alpha(h_\beta) = \kappa(t_\alpha, h_\beta) = \kappa\left(t_\alpha, \frac{2}{\kappa(t_\beta, t_\beta)} t_\beta\right) = 2\frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \mathbb{Z}.$$

On fixe une base $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ de $\mathfrak{h}^*$ composée de racines.

Si $\alpha = \sum_{k=1}^{\ell} a_k \alpha_k \in \Phi$, on a

$$2\frac{(\alpha, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = \sum_{k=1}^{\ell} 2\frac{(\alpha_k, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} a_k$$

donc $a_1, \ldots, a_\ell \in \mathbb{Q}$ et $\dim(\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\Phi)) = \dim(\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\Phi))$.

Système de racines de $\mathfrak{g}$

On munit $\mathfrak{h}^*$ de $(\alpha, \beta) = \kappa(t_\alpha, t_\beta)$. En particulier :

$$\alpha(h_\beta) = \kappa(t_\alpha, h_\beta) = \kappa\left(t_\alpha, \frac{2}{\kappa(t_\beta, t_\beta)} t_\beta\right) = 2\frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \mathbb{Z}.$$

On fixe une base $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ de $\mathfrak{h}^*$ composée de racines.
Si $\alpha = \sum_{k=1}^{\ell} a_k \alpha_k \in \Phi$, on a

$$2\frac{(\alpha, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = \sum_{k=1}^{\ell} 2\frac{(\alpha_k, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} a_k$$

donc $a_1, \ldots, a_\ell \in \mathbb{Q}$ et $\dim(\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\Phi)) = \dim(\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\Phi))$.
Similairement, on montre $(\alpha, \alpha) \in \mathbb{Q}_+$.

Système de racines de $\mathfrak{g}$

Système de racines de $\mathfrak{g}$

La forme $(\ ,\ )$ induit un produit scalaire sur $E = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\Phi) \otimes \mathbb{R}$.

Système de racines de $\mathfrak{g}$

La forme $(\ ,\ )$ induit un produit scalaire sur $E = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\Phi) \otimes \mathbb{R}$.
On a montré :

Théorème

- *E est un espace euclidien de dimension* $\dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{h})$
- *Φ engendre E et $0 \notin \Phi$.*
- *Si $\alpha \in \Phi$, $\mathbb{R}\alpha \cap \Phi = \{\pm\alpha\}$.*
- *Si $\alpha, \beta \in \Phi$, $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha = \beta - 2\dfrac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha \in \Phi$.*
- *Si $\alpha, \beta \in \Phi$, $\beta(h_\alpha) = 2\dfrac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$.*

Système de racines de $\mathfrak{g}$

La forme $(\ ,\ )$ induit un produit scalaire sur $E = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\Phi) \otimes \mathbb{R}$.
On a montré :

Théorème

- *E est un espace euclidien de dimension* $\dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{h})$
- *Φ engendre E et $0 \notin \Phi$.*
- *Si $\alpha \in \Phi$, $\mathbb{R}\alpha \cap \Phi = \{\pm\alpha\}$.*
- *Si $\alpha, \beta \in \Phi$, $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha = \beta - 2\dfrac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha \in \Phi$.*
- *Si $\alpha, \beta \in \Phi$, $\beta(h_\alpha) = 2\dfrac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$.*

Φ est un système de racines dans E !

Sommaire

$\mathfrak{g}$ détermine entièrement Φ

$\mathfrak{g}$ détermine entièrement Φ

Definition

Si $x \in \ker(\mathrm{ad}_y - \lambda \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})^{\dim \mathfrak{g}}$ pour $y \in \mathfrak{g}$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on dit que x est fortement ad-nilpotent.

$\mathfrak{g}$ détermine entièrement Φ

Definition

Si $x \in \ker(\mathrm{ad}_y - \lambda \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})^{\dim \mathfrak{g}}$ pour $y \in \mathfrak{g}$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on dit que x est fortement ad-nilpotent.

On introduit

$$\mathcal{E}(\mathfrak{g}) = \langle \exp \mathrm{ad}_x,\ x \text{ fortement } \mathrm{ad}\text{-nilpotent} \rangle \subset \mathrm{Int}(\mathfrak{g}).$$

$\mathfrak{g}$ détermine entièrement Φ

Definition

Si $x \in \ker(\mathrm{ad}_y - \lambda \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})^{\dim \mathfrak{g}}$ pour $y \in \mathfrak{g}$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on dit que x est fortement ad-nilpotent.

On introduit

$$\mathcal{E}(\mathfrak{g}) = \langle \exp \mathrm{ad}_x,\ x \text{ fortement } \mathrm{ad}\text{-nilpotent} \rangle \subset \mathrm{Int}(\mathfrak{g}).$$

Avantage de $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ sur $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$: si $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$ alors $\mathcal{E}(\mathfrak{l}) \subset \mathcal{E}(\mathfrak{g})$.

$\mathfrak{g}$ détermine entièrement Φ

Definition

Si $x \in \ker(\mathrm{ad}_y - \lambda \mathrm{id}_\mathfrak{g})^{\dim \mathfrak{g}}$ pour $y \in \mathfrak{g}$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on dit que x est fortement ad-nilpotent.

On introduit

$$\mathcal{E}(\mathfrak{g}) = \langle \exp \mathrm{ad}_x,\ x \text{ fortement } \mathrm{ad}\text{-nilpotent} \rangle \subset \mathrm{Int}(\mathfrak{g}).$$

Avantage de $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ sur $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$: si $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$ alors $\mathcal{E}(\mathfrak{l}) \subset \mathcal{E}(\mathfrak{g})$.

Théorème

$\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ agit transitivement sur l'ensemble des CSA de $\mathfrak{g}$.

$\mathfrak{g}$ détermine entièrement Φ

Definition

Si $x \in \ker(\mathrm{ad}_y - \lambda \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})^{\dim \mathfrak{g}}$ pour $y \in \mathfrak{g}$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on dit que x est fortement ad-nilpotent.

On introduit

$$\mathcal{E}(\mathfrak{g}) = \langle \exp \mathrm{ad}_x,\ x \text{ fortement } \mathrm{ad}\text{-nilpotent} \rangle \subset \mathrm{Int}(\mathfrak{g}).$$

Avantage de $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ sur $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$: si $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$ alors $\mathcal{E}(\mathfrak{l}) \subset \mathcal{E}(\mathfrak{g})$.

Théorème

$\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ *agit transitivement sur l'ensemble des CSA de* $\mathfrak{g}$.

(Plus généralement : $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ agit transitivement sur les sous-algèbres nilpotentes auto-normalisantes de $\mathfrak{g}$ et sur ses sous-algèbres résolubles maximales.)

$\mathfrak{g}$ détermine entièrement Φ

Fixons deux CSA $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ de $\mathfrak{g}$ et fixons $\sigma \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ tel que $\mathfrak{h}' = \sigma(\mathfrak{h})$.

$\mathfrak{g}$ détermine entièrement Φ

Fixons deux CSA $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ de $\mathfrak{g}$ et fixons $\sigma \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ tel que $\mathfrak{h}' = \sigma(\mathfrak{h})$. Si $h \in \mathfrak{h}$, $x \in \mathfrak{g}$ et $\alpha \in \mathfrak{h}^*$,

$$x \in \mathfrak{g}_{\alpha,\mathfrak{h}} \iff \forall h \in \mathfrak{h}, [h, x] = \alpha(h)x$$

$\mathfrak{g}$ détermine entièrement Φ

Fixons deux CSA $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ de $\mathfrak{g}$ et fixons $\sigma \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ tel que $\mathfrak{h}' = \sigma(\mathfrak{h})$. Si $h \in \mathfrak{h}$, $x \in \mathfrak{g}$ et $\alpha \in \mathfrak{h}^*$,

$$\begin{aligned} x \in \mathfrak{g}_{\alpha,\mathfrak{h}} &\iff \forall h \in \mathfrak{h}, [h, x] = \alpha(h)x \\ &\iff \forall h \in \mathfrak{h}, [\sigma(h), \sigma(x)] = \alpha(h)\sigma(x) \end{aligned}$$

$\mathfrak{g}$ détermine entièrement Φ

Fixons deux CSA $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ de $\mathfrak{g}$ et fixons $\sigma \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ tel que $\mathfrak{h}' = \sigma(\mathfrak{h})$. Si $h \in \mathfrak{h}$, $x \in \mathfrak{g}$ et $\alpha \in \mathfrak{h}^*$,

$$\begin{aligned} x \in \mathfrak{g}_{\alpha,\mathfrak{h}} &\iff \forall h \in \mathfrak{h}, [h, x] = \alpha(h)x \\ &\iff \forall h \in \mathfrak{h}, [\sigma(h), \sigma(x)] = \alpha(h)\sigma(x) \\ &\iff \forall h \in \mathfrak{h}', [h, \sigma(x)] = \alpha(\sigma^{-1}(h))\sigma(x) \end{aligned}$$

$\mathfrak{g}$ détermine entièrement Φ

Fixons deux CSA $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ de $\mathfrak{g}$ et fixons $\sigma \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ tel que $\mathfrak{h}' = \sigma(\mathfrak{h})$. Si $h \in \mathfrak{h}$, $x \in \mathfrak{g}$ et $\alpha \in \mathfrak{h}^*$,

$$\begin{aligned} x \in \mathfrak{g}_{\alpha,\mathfrak{h}} &\iff \forall h \in \mathfrak{h}, [h, x] = \alpha(h)x \\ &\iff \forall h \in \mathfrak{h}, [\sigma(h), \sigma(x)] = \alpha(h)\sigma(x) \\ &\iff \forall h \in \mathfrak{h}', [h, \sigma(x)] = \alpha(\sigma^{-1}(h))\sigma(x) \\ &\iff \sigma(x) \in \mathfrak{g}_{\alpha\sigma^{-1},\mathfrak{h}'} \end{aligned}$$

$\mathfrak{g}$ détermine entièrement Φ

Fixons deux CSA $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ de $\mathfrak{g}$ et fixons $\sigma \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ tel que $\mathfrak{h}' = \sigma(\mathfrak{h})$. Si $h \in \mathfrak{h}$, $x \in \mathfrak{g}$ et $\alpha \in \mathfrak{h}^*$,

$$\begin{aligned} x \in \mathfrak{g}_{\alpha,\mathfrak{h}} &\iff \forall h \in \mathfrak{h}, [h, x] = \alpha(h)x \\ &\iff \forall h \in \mathfrak{h}, [\sigma(h), \sigma(x)] = \alpha(h)\sigma(x) \\ &\iff \forall h \in \mathfrak{h}', [h, \sigma(x)] = \alpha(\sigma^{-1}(h))\sigma(x) \\ &\iff \sigma(x) \in \mathfrak{g}_{\alpha\sigma^{-1},\mathfrak{h}'} \end{aligned}$$

donc $\mathfrak{g}_{\alpha,\mathfrak{h}} = \sigma^{-1}(\mathfrak{g}_{\alpha\sigma^{-1},\mathfrak{h}'})$.

$\mathfrak{g}$ détermine entièrement Φ

Fixons deux CSA $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ de $\mathfrak{g}$ et fixons $\sigma \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ tel que $\mathfrak{h}' = \sigma(\mathfrak{h})$. Si $h \in \mathfrak{h}$, $x \in \mathfrak{g}$ et $\alpha \in \mathfrak{h}^*$,

$$\begin{aligned} x \in \mathfrak{g}_{\alpha,\mathfrak{h}} &\iff \forall h \in \mathfrak{h}, [h, x] = \alpha(h)x \\ &\iff \forall h \in \mathfrak{h}, [\sigma(h), \sigma(x)] = \alpha(h)\sigma(x) \\ &\iff \forall h \in \mathfrak{h}', [h, \sigma(x)] = \alpha(\sigma^{-1}(h))\sigma(x) \\ &\iff \sigma(x) \in \mathfrak{g}_{\alpha\sigma^{-1},\mathfrak{h}'} \end{aligned}$$

donc $\mathfrak{g}_{\alpha,\mathfrak{h}} = \sigma^{-1}(\mathfrak{g}_{\alpha\sigma^{-1},\mathfrak{h}'})$.
En particulier,

$$\mathfrak{g}_{\alpha,\mathfrak{h}} \neq \{0\} \iff \mathfrak{g}_{\alpha\sigma^{-1},\mathfrak{h}'} \neq \{0\} \text{ et } \Phi_{\mathfrak{h}}\sigma^{-1} = \Phi_{\mathfrak{h}'}.$$

Φ caractérise $\mathfrak{g}$

Φ caractérise $\mathfrak{g}$

On suppose $\mathfrak{g}$ semi-simple et $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ une base de Φ.

Φ caractérise $\mathfrak{g}$

On suppose $\mathfrak{g}$ semi-simple et $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ une base de Φ.
Peut-on "caractériser" de $\mathfrak{g}$ à partir de $\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$?

Φ caractérise $\mathfrak{g}$

On suppose $\mathfrak{g}$ semi-simple et $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ une base de Φ. Peut-on "caractériser" de $\mathfrak{g}$ à partir de $\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$?

Lemme

Soit $\beta \in \Phi^+$. Il existe $i_1, \ldots, i_s \in [\![1, \ell]\!]$ tels que

$$\beta = \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_s} \quad \textit{et} \quad \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_k} \in \Phi, \quad \forall k \in [\![1, k]\!].$$

Φ caractérise $\mathfrak{g}$

On suppose $\mathfrak{g}$ semi-simple et $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ une base de Φ.
Peut-on "caractériser" de $\mathfrak{g}$ à partir de $\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$?

Lemme

Soit $\beta \in \Phi^+$. Il existe $i_1, \ldots, i_s \in [\![1, \ell]\!]$ tels que

$$\beta = \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_s} \quad \textit{et} \quad \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_k} \in \Phi, \quad \forall k \in [\![1, k]\!].$$

Puisque $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, on a $\mathfrak{g} = \langle \mathfrak{s}_\alpha,\ \alpha \in \Delta \rangle$

Φ caractérise $\mathfrak{g}$

On suppose $\mathfrak{g}$ semi-simple et $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ une base de Φ.
Peut-on "caractériser" de $\mathfrak{g}$ à partir de $\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$?

Lemme

Soit $\beta \in \Phi^+$. Il existe $i_1, \dots, i_s \in [\![1, \ell]\!]$ tels que

$$\beta = \alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_s} \quad \textit{et} \quad \alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_k} \in \Phi, \quad \forall k \in [\![1, k]\!].$$

Puisque $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, on a $\mathfrak{g} = \langle \mathfrak{s}_\alpha,\ \alpha \in \Delta \rangle$ et on a aussi

$$(S1) \quad [h_\alpha, h_\beta] = 0, \qquad\qquad (S2) \quad [x_\alpha, y_\beta] = \delta_{\alpha,\beta} h_\alpha,$$

Φ caractérise $\mathfrak{g}$

On suppose $\mathfrak{g}$ semi-simple et $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ une base de Φ.
Peut-on "caractériser" de $\mathfrak{g}$ à partir de $\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$?

Lemme

Soit $\beta \in \Phi^+$. Il existe $i_1, \ldots, i_s \in [\![1, \ell]\!]$ tels que

$$\beta = \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_s} \quad \textit{et} \quad \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_k} \in \Phi, \quad \forall k \in [\![1, k]\!].$$

Puisque $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, on a $\mathfrak{g} = \langle \mathfrak{s}_\alpha,\ \alpha \in \Delta \rangle$ et on a aussi

$$\begin{array}{llll} (S1) & [h_\alpha, h_\beta] = 0, & (S2) & [x_\alpha, y_\beta] = \delta_{\alpha,\beta} h_\alpha, \\ (S3) & [h_\alpha, x_\beta] = \langle \alpha, \beta \rangle x_\beta, & (S3') & [h_\alpha, y_\beta] = -\langle \alpha, \beta \rangle y_\beta, \end{array}$$

Φ caractérise $\mathfrak{g}$

On suppose $\mathfrak{g}$ semi-simple et $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ une base de Φ.
Peut-on "caractériser" de $\mathfrak{g}$ à partir de $\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$?

Lemme

Soit $\beta \in \Phi^+$. Il existe $i_1, \dots, i_s \in [\![1, \ell]\!]$ tels que

$$\beta = \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_s} \quad \textit{et} \quad \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_k} \in \Phi, \quad \forall k \in [\![1, k]\!].$$

Puisque $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, on a $\mathfrak{g} = \langle \mathfrak{s}_\alpha, \alpha \in \Delta \rangle$ et on a aussi

$$\begin{array}{llll}
(S1) & [h_\alpha, h_\beta] = 0, & (S2) & [x_\alpha, y_\beta] = \delta_{\alpha,\beta} h_\alpha, \\
(S3) & [h_\alpha, x_\beta] = \langle \alpha, \beta \rangle x_\beta, & (S3') & [h_\alpha, y_\beta] = -\langle \alpha, \beta \rangle y_\beta, \\
(S4) & \mathrm{ad}_{x_\alpha}^{-\langle \beta, \alpha \rangle + 1}(x_\beta) = 0, & (S4') & \mathrm{ad}_{y_\alpha}^{-\langle \beta, \alpha \rangle + 1}(y_\beta) = 0.
\end{array}$$

Φ caractérise $\mathfrak{g}$

Φ caractérise $\mathfrak{g}$

On fixe deux algèbres de Lie $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}'$ deux CSA.

Φ caractérise $\mathfrak{g}$

On fixe deux algèbres de Lie $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}'$ deux CSA. On Φ,Φ' leur système de racines et on suppose qu'il existe un isomorphisme $\pi : \Phi \longrightarrow \Phi'$.

Φ caractérise $\mathfrak{g}$

On fixe deux algèbres de Lie $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}'$ deux CSA. On Φ,Φ' leur système de racines et on suppose qu'il existe un isomorphisme $\pi : \Phi \longrightarrow \Phi'$.
On fixe également une base $\Delta \subset \Phi$.

Φ caractérise $\mathfrak{g}$

On fixe deux algèbres de Lie $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}'$ deux CSA.
On Φ,Φ' leur système de racines et on suppose qu'il existe un isomorphisme $\pi : \Phi \longrightarrow \Phi'$.
On fixe également une base $\Delta \subset \Phi$.
Pour $\alpha \in \Delta$, on fixe $x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha \in \mathfrak{g}$ et $x_{\pi(\alpha)}, y_{\pi(\alpha)}, h_{\pi(\alpha)} \in \mathfrak{g}'$.

Φ caractérise $\mathfrak{g}$

On fixe deux algèbres de Lie $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}'$ deux CSA.
On Φ,Φ' leur système de racines et on suppose qu'il existe un isomorphisme $\pi : \Phi \longrightarrow \Phi'$.
On fixe également une base $\Delta \subset \Phi$.
Pour $\alpha \in \Delta$, on fixe $x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha \in \mathfrak{g}$ et $x_{\pi(\alpha)}, y_{\pi(\alpha)}, h_{\pi(\alpha)} \in \mathfrak{g}'$.

Théorème

Il existe un unique isomorphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}'$ qui envoie x_α sur $x_{\pi(\alpha)}$, y_α sur $y_{\pi(\alpha)}$ et h_α sur $h_{\pi(\alpha)}$.

Un théorème d'existence

Un théorème d'existence

Théorème

Soit Φ *un système de racine de base* $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$*.*
L'algèbre de Lie engendrée par 3ℓ *générateurs* $\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ *vérifiant les relations*

$$\begin{array}{llll}
(S1) & [h_\alpha, h_\beta] = 0, & (S2) & [x_\alpha, y_\beta] = \delta_{\alpha,\beta} h_\alpha, \\
(S3) & [h_\alpha, x_\beta] = \langle \alpha, \beta \rangle x_\beta, & (S3') & [h_\alpha, y_\beta] = -\langle \alpha, \beta \rangle y_\beta, \\
(S4) & \mathrm{ad}_{x_\alpha}^{-\langle \beta, \alpha \rangle + 1}(x_\beta) = 0, & (S4') & \mathrm{ad}_{y_\alpha}^{-\langle \beta, \alpha \rangle + 1}(y_\beta) = 0.
\end{array}$$

est de dimension finie, semi-simple, admet $\langle h_\alpha,\ \alpha \in \Delta \rangle$ *comme CSA et* Φ *comme système de racines.*

Irréductibilité et simplicité

Irréductibilité et simplicité

Fixons $\mathfrak{g}$ semi-simple et $\mathfrak{h}$ CSA de sorte que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Irréductibilité et simplicité

Fixons $\mathfrak{g}$ semi-simple et $\mathfrak{h}$ CSA de sorte que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha.$$

- Si $\Phi = \Phi_1 \perp \Phi_2$ alors $\mathfrak{g} = \langle \mathfrak{s}_\alpha, \alpha \in \Phi_1 \rangle \oplus \langle \mathfrak{s}_\alpha, \alpha \in \Phi_2 \rangle$.

Irréductibilité et simplicité

Fixons $\mathfrak{g}$ semi-simple et $\mathfrak{h}$ CSA de sorte que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha.$$

- Si $\Phi = \Phi_1 \perp \Phi_2$ alors $\mathfrak{g} = \langle \mathfrak{s}_\alpha, \alpha \in \Phi_1 \rangle \oplus \langle \mathfrak{s}_\alpha, \alpha \in \Phi_2 \rangle$.
- Réciproquement, si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ alors

$$\mathfrak{h} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1) \oplus (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_2)$$

et pour $i = 1, 2$, $\mathfrak{h}_i := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i$ est une CSA de $\mathfrak{g}_i$.
De plus, Φ_1, Φ_2 s'injectent dans Φ et $\Phi = \Phi_1 \perp \Phi_2$.

Irréductibilité et simplicité

Fixons $\mathfrak{g}$ semi-simple et $\mathfrak{h}$ CSA de sorte que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha.$$

- Si $\Phi = \Phi_1 \perp \Phi_2$ alors $\mathfrak{g} = \langle \mathfrak{s}_\alpha, \alpha \in \Phi_1 \rangle \oplus \langle \mathfrak{s}_\alpha, \alpha \in \Phi_2 \rangle$.
- Réciproquement, si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ alors

$$\mathfrak{h} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1) \oplus (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_2)$$

  et pour $i = 1, 2$, $\mathfrak{h}_i := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i$ est une CSA de $\mathfrak{g}_i$.
  De plus, Φ_1, Φ_2 s'injectent dans Φ et $\Phi = \Phi_1 \perp \Phi_2$.

Proposition

$\mathfrak{g}$ est simple si et seulement si Φ est irréductible.

Classification des algèbres de Lie simples

Classification des algèbres de Lie simples

Théorème

Si $\mathbb{K}$ *est un corps algébriquement clos de caractéristique* 0 *et si* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie simple sur* $\mathbb{K}$*, elle est de la forme :*

Classification des algèbres de Lie simples

Théorème

Si $\mathbb{K}$ est un corps algébriquement clos de caractéristique 0 et si $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple sur $\mathbb{K}$, elle est de la forme :

A_ℓ :	$(\ell \geqslant 1)$	E_6 :
B_ℓ :	$(\ell \geqslant 2)$	E_7 :
C_ℓ :	$(\ell \geqslant 3)$	E_8 :
D_ℓ :	$(\ell \geqslant 4)$	F_4 :
		G_2 :

Classification des algèbres de Lie simples

Théorème

Si $\mathbb{K}$ *est un corps algébriquement clos de caractéristique* 0 *et si* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie simple sur* $\mathbb{K}$*, elle est de la forme :*

$$
\begin{array}{llll}
A_\ell : & \mathfrak{sl}_{\ell+1} & (\ell \geqslant 1) & E_6 : \\
B_\ell : & & (\ell \geqslant 2) & E_7 : \\
C_\ell : & & (\ell \geqslant 3) & E_8 : \\
D_\ell : & & (\ell \geqslant 4) & F_4 : \\
 & & & G_2 :
\end{array}
$$

Classification des algèbres de Lie simples

Théorème

Si $\mathbb{K}$ *est un corps algébriquement clos de caractéristique* 0 *et si* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie simple sur* $\mathbb{K}$*, elle est de la forme :*

$$\begin{array}{llll@{\qquad}l}
A_\ell : & \mathfrak{sl}_{\ell+1} & (\ell \geqslant 1) & & E_6 : \\
B_\ell : & \mathfrak{so}_{2\ell+1} & (\ell \geqslant 2) & & E_7 : \\
C_\ell : & & (\ell \geqslant 3) & & E_8 : \\
D_\ell : & & (\ell \geqslant 4) & & F_4 : \\
 & & & & G_2 :
\end{array}$$

Classification des algèbres de Lie simples

Théorème

Si $\mathbb{K}$ est un corps algébriquement clos de caractéristique 0 et si $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple sur $\mathbb{K}$, elle est de la forme :

A_ℓ :	$\mathfrak{sl}_{\ell+1}$	$(\ell \geqslant 1)$	E_6 :
B_ℓ :	$\mathfrak{so}_{2\ell+1}$	$(\ell \geqslant 2)$	E_7 :
C_ℓ :	$\mathfrak{sp}_{2\ell}$	$(\ell \geqslant 3)$	E_8 :
D_ℓ :		$(\ell \geqslant 4)$	F_4 :
			G_2 :

Classification des algèbres de Lie simples

Théorème

Si $\mathbb{K}$ *est un corps algébriquement clos de caractéristique* 0 *et si* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie simple sur* $\mathbb{K}$*, elle est de la forme :*

$$\begin{array}{llll} A_\ell : & \mathfrak{sl}_{\ell+1} & (\ell \geqslant 1) & \qquad E_6 : \\ B_\ell : & \mathfrak{so}_{2\ell+1} & (\ell \geqslant 2) & \qquad E_7 : \\ C_\ell : & \mathfrak{sp}_{2\ell} & (\ell \geqslant 3) & \qquad E_8 : \\ D_\ell : & \mathfrak{so}_{2\ell} & (\ell \geqslant 4) & \qquad F_4 : \\ & & & \qquad G_2 : \end{array}$$

Classification des algèbres de Lie simples

Théorème

Si $\mathbb{K}$ est un corps algébriquement clos de caractéristique 0 et si $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple sur $\mathbb{K}$, elle est de la forme :

$$\begin{array}{llll}
A_\ell : & \mathfrak{sl}_{\ell+1} & (\ell \geqslant 1) \\
B_\ell : & \mathfrak{so}_{2\ell+1} & (\ell \geqslant 2) \\
C_\ell : & \mathfrak{sp}_{2\ell} & (\ell \geqslant 3) \\
D_\ell : & \mathfrak{so}_{2\ell} & (\ell \geqslant 4)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
E_6 : & ? \\
E_7 : & ? \\
E_8 : & ? \\
F_4 : & ? \\
G_2 : & ?
\end{array}$$