Représentations de plus haut poids

Valentin Massicot

Université de Reims Champagne-Ardenne

30 décembre 2024

Sommaire

Sommaire

Problématique et idée

Problématique et idée

Fixons $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$.

Problématique et idée

Fixons $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$.

Problème :

Problématique et idée

Fixons $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$.

Problème :

- Si $x, y \in \mathfrak{g}$, xy a un sens dans $\mathfrak{gl}(V)$ mais pas dans $\mathfrak{g}$.

Problématique et idée

Fixons $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

Problème :

- Si $x, y \in \mathfrak{g}$, xy a un sens dans $\mathfrak{gl}(V)$ mais pas dans $\mathfrak{g}$.
- $\mathfrak{g}$ provient-elle naturellement d'une algèbre associative ?

Problématique et idée

Fixons $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$.

Problème :

- Si $x, y \in \mathfrak{g}$, xy a un sens dans $\mathfrak{gl}(V)$ mais pas dans $\mathfrak{g}$.
- $\mathfrak{g}$ provient-elle naturellement d'une algèbre associative ?

Par exemple : $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ engendre $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ mais les représentations de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ ne proviennent pas de représentations de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Problématique et idée

Fixons $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

Problème :

- Si $x, y \in \mathfrak{g}$, xy a un sens dans $\mathfrak{gl}(V)$ mais pas dans $\mathfrak{g}$.
- $\mathfrak{g}$ provient-elle naturellement d'une algèbre associative ?

Par exemple : $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ engendre $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ mais les représentations de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ ne proviennent pas de représentations de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Idée :

Problématique et idée

Fixons $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$.

Problème :

- Si $x, y \in \mathfrak{g}$, xy a un sens dans $\mathfrak{gl}(V)$ mais pas dans $\mathfrak{g}$.
- $\mathfrak{g}$ provient-elle naturellement d'une algèbre associative ?

Par exemple : $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ engendre $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ mais les représentations de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ ne proviennent pas de représentations de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Idée :

Construire une algèbre associative engendrée par $\mathfrak{g}$ ne vérifiant que les relations de commutation de $\mathfrak{g}$.

Algèbre tensorielle d'un espace vectoriel

Algèbre tensorielle d'un espace vectoriel

On fixe V un espace vectoriel.

Algèbre tensorielle d'un espace vectoriel

On fixe V un espace vectoriel.
On définit $\mathfrak{T}(V) = \bigoplus_{k \geqslant 0} V^{\otimes k} = \bigoplus_{k \geqslant 0} T^k$.

Algèbre tensorielle d'un espace vectoriel

On fixe V un espace vectoriel.
On définit $\mathfrak{T}(V) = \bigoplus_{k \geqslant 0} V^{\otimes k} = \bigoplus_{k \geqslant 0} T^k$.
$\mathfrak{T}(V)$ est une algèbre associative munie de la concaténation.

Algèbre tensorielle d'un espace vectoriel

On fixe V un espace vectoriel.
On définit $\mathfrak{T}(V) = \bigoplus_{k\geqslant 0} V^{\otimes k} = \bigoplus_{k\geqslant 0} T^k$.

$\mathfrak{T}(V)$ est une algèbre associative munie de la concaténation.

$\mathfrak{T}(V)$ est caractérisée par la propriété universelle suivante :

Algèbre tensorielle d'un espace vectoriel

On fixe V un espace vectoriel.
On définit $\mathfrak{T}(V) = \bigoplus_{k \geqslant 0} V^{\otimes k} = \bigoplus_{k \geqslant 0} T^k$.
$\mathfrak{T}(V)$ est une algèbre associative munie de la concaténation.

$\mathfrak{T}(V)$ est caractérisée par la propriété universelle suivante :

Pour toute application linéaire $f : V \to A$ à valeurs dans une algèbre associative unifère A, il existe un unique morphisme d'algèbres unifères $\tilde{f} : \mathfrak{T}(V) \to A$ vérifiant :

Algèbre tensorielle d'un espace vectoriel

On fixe V un espace vectoriel.
On définit $\mathfrak{T}(V) = \bigoplus\limits_{k \geqslant 0} V^{\otimes k} = \bigoplus\limits_{k \geqslant 0} T^k$.
$\mathfrak{T}(V)$ est une algèbre associative munie de la concaténation.

$\mathfrak{T}(V)$ est caractérisée par la propriété universelle suivante :

Pour toute application linéaire $f : V \to A$ à valeurs dans une algèbre associative unifère A, il existe un unique morphisme d'algèbres unifères $\tilde{f} : \mathfrak{T}(V) \to A$ vérifiant :

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rd, "f"] \arrow[dd, "\iota"'] & \\
& A \\
\mathfrak{T}(V) \arrow[ru, dashed, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Algèbre symétrique d'un espace vectoriel

Algèbre symétrique d'un espace vectoriel

On pose $I = \langle xy - yx ; x, y \in V \rangle \subset \mathfrak{T}(V)$ et on définit

$$\mathfrak{S}(V) = \mathfrak{T}(V)/I = \bigoplus_{k \geqslant 0} S^k.$$

Algèbre symétrique d'un espace vectoriel

On pose $I = \langle xy - yx; x, y \in V \rangle \subset \mathfrak{T}(V)$ et on définit

$$\mathfrak{S}(V) = \mathfrak{T}(V)/I = \bigoplus_{k \geqslant 0} S^k.$$

$\mathfrak{S}(V)$ est caractérisée par la propriété universelle suivante :

Algèbre symétrique d'un espace vectoriel

On pose $I = \langle xy - yx ; x, y \in V \rangle \subset \mathfrak{T}(V)$ et on définit

$$\mathfrak{S}(V) = \mathfrak{T}(V)/I = \bigoplus_{k \geqslant 0} S^k.$$

$\mathfrak{S}(V)$ est caractérisée par la propriété universelle suivante :

Pour toute application linéaire $f : V \to A$ à valeurs dans une algèbre associative unifère <u>commutative</u> A, il existe un unique morphisme d'algèbres unifères $\tilde{f} : \mathfrak{S}(V) \to A$ vérifiant :

Algèbre symétrique d'un espace vectoriel

On pose $I = \langle xy - yx ; x, y \in V \rangle \subset \mathfrak{T}(V)$ et on définit

$$\mathfrak{S}(V) = \mathfrak{T}(V)/I = \bigoplus_{k \geqslant 0} S^k.$$

$\mathfrak{S}(V)$ est caractérisée par la propriété universelle suivante :

Pour toute application linéaire $f : V \to A$ à valeurs dans une algèbre associative unifère <u>commutative</u> A, il existe un unique morphisme d'algèbres unifères $\tilde{f} : \mathfrak{S}(V) \to A$ vérifiant :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rd, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & \\ \mathfrak{S}(V) \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"'] & A \end{tikzcd}$$

Algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie

Algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie

On pose $J = \langle xy - yx - [x, y]; x, y \in \mathfrak{g} \rangle \subset \mathfrak{T}(\mathfrak{g})$ et on définit

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{T}(\mathfrak{g})/J.$$

Algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie

On pose $J = \langle xy - yx - [x, y]; x, y \in \mathfrak{g} \rangle \subset \mathfrak{T}(\mathfrak{g})$ et on définit

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{T}(\mathfrak{g})/J.$$

$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ est caractérisée par la propriété universelle suivante :

Algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie

On pose $J = \langle xy - yx - [x, y]; x, y \in \mathfrak{g}\rangle \subset \mathfrak{T}(\mathfrak{g})$ et on définit

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{T}(\mathfrak{g})/J.$$

$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ est caractérisée par la propriété universelle suivante :

Pour tout morphisme d'algèbres de Lie $f : \mathfrak{g} \to A$ à valeurs dans une algèbre associative unifère A, il existe un unique morphisme d'algèbres unifères $\tilde{f} : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \to A$ vérifiant :

Algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie

On pose $J = \langle xy - yx - [x, y] ; x, y \in \mathfrak{g} \rangle \subset \mathfrak{T}(\mathfrak{g})$ et on définit

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{T}(\mathfrak{g})/J.$$

$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ est caractérisée par la propriété universelle suivante :

Pour tout morphisme d'algèbres de Lie $f : \mathfrak{g} \to A$ à valeurs dans une algèbre associative unifère A, il existe un unique morphisme d'algèbres unifères $\tilde{f} : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \to A$ vérifiant :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "\iota"'] & \\
& A \\
\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Algèbre graduée associée à $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$

Algèbre graduée associée à $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$

Idée : si $x_1, \ldots, x_s \in \mathfrak{g}$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_s$ alors dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$

Algèbre graduée associée à $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$

Idée : si $x_1, \ldots, x_s \in \mathfrak{g}$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_s$ alors dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$

$$x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(s)} = x_1 \cdots x_s + \text{ termes de "degré" } \leqslant s-1.$$

Algèbre graduée associée à $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$

Idée : si $x_1, \ldots, x_s \in \mathfrak{g}$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_s$ alors dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$

$$x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(s)} = x_1 \cdots x_s + \text{ termes de "degré" } \leqslant s-1.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$T_k = T^0 \oplus \cdots \oplus T^k \subset \mathfrak{T}(\mathfrak{g}), \quad S_k = S^0 \oplus \cdots \oplus S^k \subset \mathfrak{S}(\mathfrak{g}),$$

Algèbre graduée associée à $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$

Idée : si $x_1, \ldots, x_s \in \mathfrak{g}$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_s$ alors dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$

$$x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(s)} = x_1 \cdots x_s + \text{ termes de "degré" } \leqslant s-1.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$T_k = T^0 \oplus \cdots \oplus T^k \subset \mathfrak{T}(\mathfrak{g}), \quad S_k = S^0 \oplus \cdots \oplus S^k \subset \mathfrak{S}(\mathfrak{g}),$$

$$U_k = \iota(T_k) \subset U(\mathfrak{g}), \quad G^k = U_k / U_{k-1}, \quad G = \bigoplus_{\ell \geqslant 0} G^\ell.$$

Algèbre graduée associée à $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$

Idée : si $x_1, \ldots, x_s \in \mathfrak{g}$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_s$ alors dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$

$$x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(s)} = x_1 \cdots x_s + \text{ termes de "degré" } \leqslant s-1.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$T_k = T^0 \oplus \cdots \oplus T^k \subset \mathfrak{T}(\mathfrak{g}), \quad S_k = S^0 \oplus \cdots \oplus S^k \subset \mathfrak{S}(\mathfrak{g}),$$

$$U_k = \iota(T_k) \subset U(\mathfrak{g}), \quad G^k = U_k / U_{k-1}, \quad G = \bigoplus_{\ell \geqslant 0} G^\ell.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, on définit canoniquement $\omega_k : T^k \to G^k$ surjective d'où un morphisme $\omega : \mathfrak{T}(\mathfrak{g}) \to G$ surjectif.

Algèbre graduée associée à $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$

Idée : si $x_1, \ldots, x_s \in \mathfrak{g}$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_s$ alors dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$

$$x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(s)} = x_1 \cdots x_s + \text{ termes de "degré" } \leqslant s-1.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$T_k = T^0 \oplus \cdots \oplus T^k \subset \mathfrak{T}(\mathfrak{g}), \quad S_k = S^0 \oplus \cdots \oplus S^k \subset \mathfrak{S}(\mathfrak{g}),$$

$$U_k = \iota(T_k) \subset U(\mathfrak{g}), \quad G^k = U_k / U_{k-1}, \quad G = \bigoplus_{\ell \geqslant 0} G^\ell.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, on définit canoniquement $\omega_k : T^k \longrightarrow G^k$ surjective d'où un morphisme $\omega : \mathfrak{T}(\mathfrak{g}) \longrightarrow G$ surjectif.
Clairement, $I \subset \ker(\omega)$ d'où $\overline{\omega} : \mathfrak{S}(\mathfrak{g}) \longrightarrow G$ surjective.

Théorème PBW

Théorème PBW

Théorème

L'application $\overline{\omega} : \mathfrak{S}(\mathfrak{g}) \to G$ *est un isomorphisme d'algèbres associatives (graduées).*

Théorème PBW

Théorème

L'application $\overline{\omega} : \mathfrak{S}(\mathfrak{g}) \to G$ est un isomorphisme d'algèbres associatives (graduées).

Idée de la preuve : construire une représentation de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{S}(\mathfrak{g})$ par translation à gauche.

Théorème PBW

Théorème

L'application $\overline{\omega} : \mathfrak{S}(\mathfrak{g}) \to G$ *est un isomorphisme d'algèbres associatives (graduées).*

Idée de la preuve : construire une représentation de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{S}(\mathfrak{g})$ par translation à gauche.

Corollaire

L'application canonique $\mathfrak{g} \to \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ *est injective.*
Plus précisément, si $(x_1, \ldots, x_n)$ *est une base de* $\mathfrak{g}$ *alors*
$\{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \mid k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}\}$ *est une base de* $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$.

Théorème PBW

Théorème

L'application $\overline{\omega} : \mathfrak{S}(\mathfrak{g}) \to G$ *est un isomorphisme d'algèbres associatives (graduées).*

Idée de la preuve : construire une représentation de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{S}(\mathfrak{g})$ par translation à gauche.

Corollaire

L'application canonique $\mathfrak{g} \to \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ *est injective.*
Plus précisément, si $(x_1, \ldots, x_n)$ *est une base de* $\mathfrak{g}$ *alors* $\{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \mid k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}\}$ *est une base de* $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$*.*

Corollaire

Si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *est une sous-algèbre,* $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ *est un* $\mathfrak{U}(\mathfrak{h})$*-module libre.*

Sommaire

Modules cycliques de plus haut poids

Modules cycliques de plus haut poids

On fixe $\mathfrak{g}$ semi-simple, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une CSA, Φ le système de racines associé et Δ une base de Φ.

Modules cycliques de plus haut poids

On fixe $\mathfrak{g}$ semi-simple, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une CSA, Φ le système de racines associé et Δ une base de Φ. On fixe aussi

$$B = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \succ 0} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad N^- = \bigoplus_{\alpha \prec 0} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Modules cycliques de plus haut poids

On fixe $\mathfrak{g}$ semi-simple, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une CSA, Φ le système de racines associé et Δ une base de Φ. On fixe aussi

$$B = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \succ 0} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad N^- = \bigoplus_{\alpha \prec 0} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Définition

Soit V un $\mathfrak{g}$-module. Un vecteur $v \in V$ de poids $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ est maximal si $\mathfrak{g}_\alpha v = \{0\}$ pour tout $\alpha \succ 0$.

Modules cycliques de plus haut poids

On fixe $\mathfrak{g}$ semi-simple, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une CSA, Φ le système de racines associé et Δ une base de Φ. On fixe aussi

$$B = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \succ 0} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad N^- = \bigoplus_{\alpha \prec 0} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Définition

Soit V un $\mathfrak{g}$-module. Un vecteur $v \in V$ de poids $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ est maximal si $\mathfrak{g}_\alpha v = \{0\}$ pour tout $\alpha \succ 0$.
V est cyclique de plus haut poids s'il existe v maximal vérifiant $V = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})v$.

Structure des modules cycliques de plus haut poids

Structure des modules cycliques de plus haut poids

On fixe V cyclique de plus haut poids de vecteur maximal v (de poids λ).

Structure des modules cycliques de plus haut poids

On fixe V cyclique de plus haut poids de vecteur maximal v (de poids λ).
Par PBW, $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{U}(N^-)\mathfrak{U}(B)$ donc $V = \mathfrak{U}(N^-)v$.

Structure des modules cycliques de plus haut poids

On fixe V cyclique de plus haut poids de vecteur maximal v (de poids λ).
Par PBW, $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{U}(N^-)\mathfrak{U}(B)$ donc $V = \mathfrak{U}(N^-)v$.

Théorème

Si $\Phi^+ = \{\beta_1, \ldots, \beta_\ell\}$, *on a*

Structure des modules cycliques de plus haut poids

On fixe V cyclique de plus haut poids de vecteur maximal v (de poids λ).
Par PBW, $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{U}(N^-)\mathfrak{U}(B)$ donc $V = \mathfrak{U}(N^-)v$.

Théorème

Si $\Phi^+ = \{\beta_1, \ldots, \beta_\ell\}$, *on a*

- $V = \langle y_{\beta_1}^{i_1} \cdots y_{\beta_\ell}^{i_\ell} v,\ i_1, \ldots, i_\ell \in \mathbb{N} \rangle$.

Structure des modules cycliques de plus haut poids

On fixe V cyclique de plus haut poids de vecteur maximal v (de poids λ).
Par PBW, $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{U}(N^-)\mathfrak{U}(B)$ donc $V = \mathfrak{U}(N^-)v$.

Théorème

Si $\Phi^+ = \{\beta_1, \ldots, \beta_\ell\}$, on a

- $V = \langle y_{\beta_1}^{i_1} \cdots y_{\beta_\ell}^{i_\ell} v,\ i_1, \ldots, i_\ell \in \mathbb{N}\rangle$.
- *V est somme directe de ses espaces de poids.*

Structure des modules cycliques de plus haut poids

On fixe V cyclique de plus haut poids de vecteur maximal v (de poids λ).
Par PBW, $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{U}(N^-)\mathfrak{U}(B)$ donc $V = \mathfrak{U}(N^-)v$.

Théorème

Si $\Phi^+ = \{\beta_1, \ldots, \beta_\ell\}$, on a

- $V = \langle y_{\beta_1}^{i_1} \cdots y_{\beta_\ell}^{i_\ell} v,\ i_1, \ldots, i_\ell \in \mathbb{N}\rangle$.
- *V est somme directe de ses espaces de poids.*
- *Les poids de V sont de la forme* $\lambda - \sum_{i=1}^{\ell} k_i\beta_i, \quad k_i \in \mathbb{N}$.

Structure des modules cycliques de plus haut poids

On fixe V cyclique de plus haut poids de vecteur maximal v (de poids λ).
Par PBW, $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{U}(N^-)\mathfrak{U}(B)$ donc $V = \mathfrak{U}(N^-)v$.

Théorème

Si $\Phi^+ = \{\beta_1, \dots, \beta_\ell\}$, *on a*

- $V = \langle y_{\beta_1}^{i_1} \cdots y_{\beta_\ell}^{i_\ell} v,\ i_1, \dots, i_\ell \in \mathbb{N} \rangle$.
- *V est somme directe de ses espaces de poids.*
- *Les poids de V sont de la forme* $\lambda - \sum_{i=1}^{\ell} k_i \beta_i, \quad k_i \in \mathbb{N}$.
- *Pour tout* $\mu \in \mathfrak{h}^*$, $\dim V_\mu < +\infty$ *et* $\dim V_\lambda = 1$.

Structure des modules cycliques de plus haut poids

On fixe V cyclique de plus haut poids de vecteur maximal v (de poids λ).
Par PBW, $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{U}(N^-)\mathfrak{U}(B)$ donc $V = \mathfrak{U}(N^-)v$.

Théorème

Si $\Phi^+ = \{\beta_1, \ldots, \beta_\ell\}$, on a

- $V = \langle y_{\beta_1}^{i_1} \cdots y_{\beta_\ell}^{i_\ell} v,\ i_1, \ldots, i_\ell \in \mathbb{N}\rangle$.
- *V est somme directe de ses espaces de poids.*
- *Les poids de V sont de la forme* $\lambda - \sum_{i=1}^{\ell} k_i\beta_i, \quad k_i \in \mathbb{N}$.
- *Pour tout $\mu \in \mathfrak{h}^*$,* $\dim V_\mu < +\infty$ *et* $\dim V_\lambda = 1$.
- *V est indécomposable et admet un unique sous-module maximal.*

Structure des modules cycliques de plus haut poids

On fixe V cyclique de plus haut poids de vecteur maximal v (de poids λ).
Par PBW, $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{U}(N^-)\mathfrak{U}(B)$ donc $V = \mathfrak{U}(N^-)v$.

Théorème

Si $\Phi^+ = \{\beta_1, \ldots, \beta_\ell\}$, *on a*

- $V = \langle y_{\beta_1}^{i_1} \cdots y_{\beta_\ell}^{i_\ell} v,\ i_1, \ldots, i_\ell \in \mathbb{N}\rangle$.
- *V est somme directe de ses espaces de poids.*
- *Les poids de V sont de la forme* $\lambda - \sum_{i=1}^{\ell} k_i\beta_i, \quad k_i \in \mathbb{N}$.
- *Pour tout* $\mu \in \mathfrak{h}^*$, $\dim V_\mu < +\infty$ *et* $\dim V_\lambda = 1$.
- *V est indécomposable et admet un unique sous-module maximal.*
- *Si V est irréductible, il a un unique vecteur maximal.*

Une construction universelle

Une construction universelle

On fixe $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

Une construction universelle

On fixe $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.
Deux constructions possibles :

Une construction universelle

On fixe $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.
Deux constructions possibles :

- Via une représentation induite de B.

Une construction universelle

On fixe $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.
Deux constructions possibles :

- Via une représentation induite de B.
- Via un quotient de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$.

Une construction universelle

On fixe $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.
Deux constructions possibles :

- Via une représentation induite de B.
- Via un quotient de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$.

On veut les relations

$$x_\alpha v = 0, \quad \forall \alpha \succ 0$$

$$(h - \lambda(h)1)v = 0, \quad \forall h \in \mathfrak{h}$$

Une construction universelle

On fixe $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.
Deux constructions possibles :

- Via une représentation induite de B.
- Via un quotient de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$.

On veut les relations

$$x_\alpha v = 0, \quad \forall \alpha \succ 0$$

$$(h - \lambda(h)1)v = 0, \quad \forall h \in \mathfrak{h}$$

donc on pose $I = \langle x_\alpha \ \ (\alpha \succ 0),\ h - \lambda(h)1 \ \ (h \in \mathfrak{h})\rangle \subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ et

$$W(\lambda) = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})/I.$$

Une construction universelle

On fixe $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.
Deux constructions possibles :

- Via une représentation induite de B.
- Via un quotient de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$.

On veut les relations

$$x_\alpha v = 0, \quad \forall \alpha \succ 0$$

$$(h - \lambda(h)1)v = 0, \quad \forall h \in \mathfrak{h}$$

donc on pose $I = \langle x_\alpha \;\; (\alpha \succ 0),\; h - \lambda(h)1 \;\; (h \in \mathfrak{h})\rangle \subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ et

$$W(\lambda) = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})/I.$$

$W(\lambda)$ est cyclique de plus haut poids λ pour $v = 1 + I$.

Une construction universelle

Une construction universelle

Considérons V cyclique de plus haut poids λ pour w.

Une construction universelle

Considérons V cyclique de plus haut poids λ pour w.

$\phi : \begin{array}{ccc} \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) & \to & V \\ x & \mapsto & xw \end{array}$ induit $\overline{\phi} : W(\lambda) \to V$ surjectif.

Une construction universelle

Considérons V cyclique de plus haut poids λ pour w.

$\phi : \begin{array}{ccc} \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) & \to & V \\ x & \mapsto & xw \end{array}$ induit $\overline{\phi} : W(\lambda) \to V$ surjectif.

Théorème

Tout module cyclique de plus haut-poids λ est un quotient du module de Verma $W(\lambda)$.

Une construction universelle

Considérons V cyclique de plus haut poids λ pour w.

$\phi : \begin{array}{ccc} \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) & \to & V \\ x & \mapsto & xw \end{array}$ induit $\overline{\phi} : W(\lambda) \to V$ surjectif.

Théorème

Tout module cyclique de plus haut-poids λ est un quotient du module de Verma $W(\lambda)$.

Corollaire

Il existe un unique module cyclique de plus haut poids λ irréductible $Z(\lambda)$.

Représentations irréductibles de dimension finies

Représentations irréductibles de dimension finies

On fixe $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ irréductible de dimension finie.

Représentations irréductibles de dimension finies

On fixe $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ irréductible de dimension finie.
Théorème de Lie : V possède un vecteur propre commun pour

$$B = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \succ 0} \mathfrak{g}_\alpha .$$

Représentations irréductibles de dimension finies

On fixe $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ irréductible de dimension finie.
Théorème de Lie : V possède un vecteur propre commun pour

$$B = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \succ 0} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Par irréductibilité, $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})v = V$ et V est cyclique de plus haut poids $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

Représentations irréductibles de dimension finies

On fixe $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ irréductible de dimension finie.
Théorème de Lie : V possède un vecteur propre commun pour

$$B = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \succ 0} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Par irréductibilité, $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})v = V$ et V est cyclique de plus haut poids $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.
Si $\alpha \in \Delta$, $\mathfrak{s}_\alpha$ agit sur V et v est maximal pour $\mathfrak{s}_\alpha$.

Représentations irréductibles de dimension finies

On fixe $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ irréductible de dimension finie.
Théorème de Lie : V possède un vecteur propre commun pour

$$B = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \succ 0} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Par irréductibilité, $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})v = V$ et V est cyclique de plus haut poids $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.
Si $\alpha \in \Delta$, $\mathfrak{s}_\alpha$ agit sur V et v est maximal pour $\mathfrak{s}_\alpha$.
$\mathfrak{U}(\mathfrak{sl}_\alpha)v$ est un $\mathfrak{sl}_\alpha$-module cyclique de plus haut poids $\lambda(h_\alpha)$ de dimension finie donc est irréductible.

Représentations irréductibles de dimension finies

On fixe $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ irréductible de dimension finie.
Théorème de Lie : V possède un vecteur propre commun pour

$$B = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \succ 0} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Par irréductibilité, $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})v = V$ et V est cyclique de plus haut poids $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.
Si $\alpha \in \Delta$, $\mathfrak{s}_\alpha$ agit sur V et v est maximal pour $\mathfrak{s}_\alpha$.
$\mathfrak{U}(\mathfrak{sl}_\alpha)v$ est un $\mathfrak{sl}_\alpha$-module cyclique de plus haut poids $\lambda(h_\alpha)$ de dimension finie donc est irréductible.
En particulier, $\lambda(h_\alpha) \in \mathbb{N}$.

Réseau des poids

Réseau des poids

Définition

On définit le réseau des poids entiers et le réseau des racines :

Réseau des poids

Définition

On définit le réseau des poids entiers et le réseau des racines :

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \forall \alpha \in \Phi,\ \langle \lambda, \alpha \rangle = 2\frac{(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \Lambda_r = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}}(\Phi).$$

On dit que $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ est dominant si $\langle \lambda, \alpha \rangle \geqslant 0$ pour tout $\alpha \in \Phi^+$.

Réseau des poids

Définition

On définit le réseau des poids entiers et le réseau des racines :

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \forall \alpha \in \Phi,\ \langle \lambda, \alpha \rangle = 2\frac{(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \Lambda_r = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}}(\Phi).$$

On dit que $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ est dominant si $\langle \lambda, \alpha \rangle \geqslant 0$ pour tout $\alpha \in \Phi^+$. On note Λ^+ l'ensemble des poids dominants intégraux.

Réseau des poids

Définition

On définit le réseau des poids entiers et le réseau des racines :

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \forall \alpha \in \Phi,\ \langle \lambda, \alpha \rangle = 2\frac{(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \Lambda_r = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}}(\Phi).$$

On dit que $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ est dominant si $\langle \lambda, \alpha \rangle \geqslant 0$ pour tout $\alpha \in \Phi^+$. On note Λ^+ l'ensemble des poids dominants intégraux.

On a

- $\Lambda = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}}(w_\alpha)_{\alpha \in \Phi}$ avec $(w_\alpha)_{\alpha \in \Phi}$ base duale de $\left(\frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}\right)_{\alpha \in \Delta}$.

Réseau des poids

Définition

On définit le réseau des poids entiers et le réseau des racines :

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \forall \alpha \in \Phi,\ \langle \lambda, \alpha \rangle = 2\frac{(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \Lambda_r = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}}(\Phi).$$

On dit que $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ est dominant si $\langle \lambda, \alpha \rangle \geqslant 0$ pour tout $\alpha \in \Phi^+$. On note Λ^+ l'ensemble des poids dominants intégraux.

On a

- $\Lambda = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}}(w_\alpha)_{\alpha \in \Phi}$ avec $(w_\alpha)_{\alpha \in \Phi}$ base duale de $\left(\frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)} \right)_{\alpha \in \Delta}$.
- $\Lambda_r \subset \Lambda$.

Réseau des poids

Définition

On définit le réseau des poids entiers et le réseau des racines :

$$\Lambda = \left\{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \forall \alpha \in \Phi,\ \langle \lambda, \alpha \rangle = 2\frac{(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}\right\}, \quad \Lambda_r = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}}(\Phi).$$

On dit que $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ est dominant si $\langle \lambda, \alpha \rangle \geqslant 0$ pour tout $\alpha \in \Phi^+$. On note Λ^+ l'ensemble des poids dominants intégraux.

On a

- $\Lambda = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}}(w_\alpha)_{\alpha \in \Phi}$ avec $(w_\alpha)_{\alpha \in \Phi}$ base duale de $\left(\frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}\right)_{\alpha \in \Delta}$.
- $\Lambda_r \subset \Lambda$.
- Tout poids est $\mathcal{W}$-conjugué à un unique poids dominant.

Représentations irréductibles de dimension finie

Représentations irréductibles de dimension finie

Théorème

Si $\lambda \in \mathfrak{h}^*$*,* $Z(\lambda)$ *est de dimension finie* $\iff \lambda \in \Lambda^+$*.*
En particulier, les représentation irréductibles de dimension finies sont en bijection avec Λ^+*.*

Représentations irréductibles de dimension finie

Théorème

Si $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $Z(\lambda)$ est de dimension finie $\iff \lambda \in \Lambda^+$.
En particulier, les représentation irréductibles de dimension finies sont en bijection avec Λ^+.

Proposition

Si $\mu \in \Lambda$, μ apparaît dans $Z(\lambda)$ si et seulement si pour tout $\sigma \in \mathcal{W}$, $\sigma(\mu) \prec \lambda$.

Représentations irréductibles de dimension finie

Théorème

Si $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $Z(\lambda)$ est de dimension finie $\iff \lambda \in \Lambda^+$.
En particulier, les représentation irréductibles de dimension finies sont en bijection avec Λ^+.

Proposition

Si $\mu \in \Lambda$, μ apparaît dans $Z(\lambda)$ si et seulement si pour tout $\sigma \in \mathcal{W}$, $\sigma(\mu) \prec \lambda$.

Question :

Représentations irréductibles de dimension finie

Théorème

Si $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $Z(\lambda)$ est de dimension finie $\iff \lambda \in \Lambda^+$.
En particulier, les représentation irréductibles de dimension finies sont en bijection avec Λ^+.

Proposition

Si $\mu \in \Lambda$, μ apparaît dans $Z(\lambda)$ si et seulement si pour tout $\sigma \in \mathcal{W}$, $\sigma(\mu) \prec \lambda$.

Question : Peut-on déterminer la dimension de ces représentations / espaces de poids ?

Représentations irréductibles de dimension finie

Théorème

Si $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $Z(\lambda)$ est de dimension finie $\iff$ $\lambda \in \Lambda^+$.
En particulier, les représentation irréductibles de dimension finies sont en bijection avec Λ^+.

Proposition

Si $\mu \in \Lambda$, μ apparaît dans $Z(\lambda)$ si et seulement si pour tout $\sigma \in \mathcal{W}$, $\sigma(\mu) \prec \lambda$.

Question : Peut-on déterminer la dimension de ces représentations / espaces de poids ?

Idée :

Représentations irréductibles de dimension finie

Théorème

Si $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $Z(\lambda)$ est de dimension finie $\iff$ $\lambda \in \Lambda^+$.
En particulier, les représentation irréductibles de dimension finies sont en bijection avec Λ^+.

Proposition

Si $\mu \in \Lambda$, μ apparaît dans $Z(\lambda)$ si et seulement si pour tout $\sigma \in \mathcal{W}$, $\sigma(\mu) \prec \lambda$.

Question : Peut-on déterminer la dimension de ces représentations / espaces de poids ?

Idée : $\longrightarrow$ Trace d'un élément central

Représentations irréductibles de dimension finie

Théorème

Si $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $Z(\lambda)$ est de dimension finie $\iff \lambda \in \Lambda^+$.
En particulier, les représentation irréductibles de dimension finies sont en bijection avec Λ^+.

Proposition

Si $\mu \in \Lambda$, μ apparaît dans $Z(\lambda)$ si et seulement si pour tout $\sigma \in \mathcal{W}$, $\sigma(\mu) \prec \lambda$.

Question : Peut-on déterminer la dimension de ces représentations / espaces de poids ?

Idée :
- $\rightarrow$ Trace d'un élément central
- $\rightarrow$ Caractère d'une représentation

Sommaire

Élément de Casimir

Élément de Casimir

κ induit un isomorphisme $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$ en tant que $\mathfrak{g}$-module.

Élément de Casimir

κ induit un isomorphisme $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$ en tant que $\mathfrak{g}$-module.
On en déduit

$$\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g} \simeq \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}).$$

Élément de Casimir

κ induit un isomorphisme $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$ en tant que $\mathfrak{g}$-module.
On en déduit

$$\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g} \simeq \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}).$$

Si $x, y, z \in \mathfrak{g}$

$$x \cdot (y \otimes z) = \mathrm{ad}_x(y) \otimes z + y \otimes \mathrm{ad}_x(z)$$

Élément de Casimir

κ induit un isomorphisme $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$ en tant que $\mathfrak{g}$-module.
On en déduit

$$\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g} \simeq \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}).$$

Si $x, y, z \in \mathfrak{g}$

$$x \cdot (y \otimes z) = \mathrm{ad}_x(y) \otimes z + y \otimes \mathrm{ad}_x(z)$$

donc dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, $x \cdot (yz) = [x, y]z + y[x, z] = [x, yz]$.

Élément de Casimir

κ induit un isomorphisme $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$ en tant que $\mathfrak{g}$-module.
On en déduit

$$\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g} \simeq \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}).$$

Si $x, y, z \in \mathfrak{g}$

$$x \cdot (y \otimes z) = \mathrm{ad}_x(y) \otimes z + y \otimes \mathrm{ad}_x(z)$$

donc dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, $x \cdot (yz) = [x, y]z + y[x, z] = [x, yz]$.
Finalement, pour $f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g})$

Élément de Casimir

κ induit un isomorphisme $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$ en tant que $\mathfrak{g}$-module.
On en déduit

$$\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g} \simeq \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}).$$

Si $x, y, z \in \mathfrak{g}$

$$x \cdot (y \otimes z) = \mathrm{ad}_x(y) \otimes z + y \otimes \mathrm{ad}_x(z)$$

donc dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, $x \cdot (yz) = [x, y]z + y[x, z] = [x, yz]$.
Finalement, pour $f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g})$

$$f \in Z(\mathfrak{U}(\mathfrak{g})) \iff \mathfrak{g} \cdot f = 0 \text{ dans } \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$$

Élément de Casimir

κ induit un isomorphisme $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$ en tant que $\mathfrak{g}$-module.
On en déduit

$$\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g} \simeq \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}).$$

Si $x, y, z \in \mathfrak{g}$

$$x \cdot (y \otimes z) = \mathrm{ad}_x(y) \otimes z + y \otimes \mathrm{ad}_x(z)$$

donc dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, $x \cdot (yz) = [x, y]z + y[x, z] = [x, yz]$.
Finalement, pour $f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g})$

$$\begin{aligned} f \in Z(\mathfrak{U}(\mathfrak{g})) &\iff \mathfrak{g} \cdot f = 0 \text{ dans } \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \\ &\iff \mathfrak{g} \cdot f = 0 \text{ dans } \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}) \end{aligned}$$

Élément de Casimir

κ induit un isomorphisme $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$ en tant que $\mathfrak{g}$-module.
On en déduit

$$\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g} \simeq \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}).$$

Si $x, y, z \in \mathfrak{g}$

$$x \cdot (y \otimes z) = \mathrm{ad}_x(y) \otimes z + y \otimes \mathrm{ad}_x(z)$$

donc dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, $x \cdot (yz) = [x, y]z + y[x, z] = [x, yz]$.
Finalement, pour $f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g})$

$$\begin{aligned} f \in Z(\mathfrak{U}(\mathfrak{g})) &\Longleftarrow \mathfrak{g} \cdot f = 0 \text{ dans } \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \\ &\Longleftrightarrow \mathfrak{g} \cdot f = 0 \text{ dans } \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}) \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathfrak{g}, \mathrm{ad}_x \circ f - f \circ \mathrm{ad}_x = 0 \end{aligned}$$

Élément de Casimir

κ induit un isomorphisme $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$ en tant que $\mathfrak{g}$-module.
On en déduit

$$\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g} \simeq \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}).$$

Si $x, y, z \in \mathfrak{g}$

$$x \cdot (y \otimes z) = \mathrm{ad}_x(y) \otimes z + y \otimes \mathrm{ad}_x(z)$$

donc dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, $x \cdot (yz) = [x, y]z + y[x, z] = [x, yz]$.
Finalement, pour $f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g})$

$$\begin{aligned} f \in Z(\mathfrak{U}(\mathfrak{g})) &\Longleftarrow \mathfrak{g} \cdot f = 0 \text{ dans } \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \\ &\Longleftrightarrow \mathfrak{g} \cdot f = 0 \text{ dans } \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}) \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathfrak{g},\ \mathrm{ad}_x \circ f - f \circ \mathrm{ad}_x = 0 \\ &\Longleftrightarrow f \text{ est un opérateur d'entrelacement} \end{aligned}$$

Élément de Casimir

Élément de Casimir

Définition

L'élément de Casimir est l'image dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ de $\mathrm{id}_{\mathfrak{g}} \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g})$.

Élément de Casimir

Définition

L'élément de Casimir est l'image dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ de $\mathrm{id}_{\mathfrak{g}} \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g})$.

On fixe $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathfrak{g}$ et $f = (f_1, \ldots, f_n)$ sa base κ-duale : $\kappa(e_i, f_j) = \delta_{ij}$.

Élément de Casimir

Définition

L'élément de Casimir est l'image dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ de $\mathrm{id}_{\mathfrak{g}} \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g})$.

On fixe $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathfrak{g}$ et $f = (f_1, \ldots, f_n)$ sa base κ-duale : $\kappa(e_i, f_j) = \delta_{ij}$.
On a

$$\mathrm{id}_{\mathfrak{g}} = \kappa(e_1, \cdot) \otimes f_1 + \cdots + \kappa(e_n, \cdot) \otimes f_n \text{ dans } \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$$

Élément de Casimir

Définition

L'élément de Casimir est l'image dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ de $\mathrm{id}_{\mathfrak{g}} \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g})$.

On fixe $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathfrak{g}$ et $f = (f_1, \ldots, f_n)$ sa base κ-duale : $\kappa(e_i, f_j) = \delta_{ij}$.
On a

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{\mathfrak{g}} &= \kappa(e_1, \cdot) \otimes f_1 + \cdots + \kappa(e_n, \cdot) \otimes f_n \text{ dans } \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g} \\ &= e_1 \otimes f_1 + \cdots + e_n \otimes f_n \text{ dans } \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \end{aligned}$$

Élément de Casimir

Définition

L'élément de Casimir est l'image dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ de $\mathrm{id}_{\mathfrak{g}} \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g})$.

On fixe $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathfrak{g}$ et $f = (f_1, \dots, f_n)$ sa base κ-duale : $\kappa(e_i, f_j) = \delta_{ij}$.
On a

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{\mathfrak{g}} &= \kappa(e_1, \cdot) \otimes f_1 + \cdots + \kappa(e_n, \cdot) \otimes f_n \text{ dans } \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g} \\ &= e_1 \otimes f_1 + \cdots + e_n \otimes f_n \text{ dans } \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \end{aligned}$$

donc $c = e_1 f_1 + \cdots + e_n f_n \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$.

Élément de Casimir

Définition

L'élément de Casimir est l'image dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ de $\mathrm{id}_{\mathfrak{g}} \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g})$.

On fixe $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathfrak{g}$ et $f = (f_1, \dots, f_n)$ sa base κ-duale : $\kappa(e_i, f_j) = \delta_{ij}$.
On a

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{\mathfrak{g}} &= \kappa(e_1, \cdot) \otimes f_1 + \cdots + \kappa(e_n, \cdot) \otimes f_n \text{ dans } \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g} \\ &= e_1 \otimes f_1 + \cdots + e_n \otimes f_n \text{ dans } \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \end{aligned}$$

donc $c = e_1 f_1 + \cdots + e_n f_n \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$.
Ici,

$$e = (x_\alpha)_{\alpha \in \Phi} \cup (h_\beta)_{\beta \in \Delta} \text{ et } f = (z_\alpha)_{\alpha \in \Phi} \cup (k_\beta)_{\beta \in \Delta}$$

Élément de Casimir

Définition

L'élément de Casimir est l'image dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ de $\mathrm{id}_{\mathfrak{g}} \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g})$.

On fixe $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathfrak{g}$ et $f = (f_1, \ldots, f_n)$ sa base κ-duale : $\kappa(e_i, f_j) = \delta_{ij}$.
On a

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{\mathfrak{g}} &= \kappa(e_1, \cdot) \otimes f_1 + \cdots + \kappa(e_n, \cdot) \otimes f_n \text{ dans } \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g} \\ &= e_1 \otimes f_1 + \cdots + e_n \otimes f_n \text{ dans } \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \end{aligned}$$

donc $c = e_1 f_1 + \cdots + e_n f_n \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$.
Ici,

$$e = (x_\alpha)_{\alpha \in \Phi} \cup (h_\beta)_{\beta \in \Delta} \text{ et } f = (z_\alpha)_{\alpha \in \Phi} \cup (k_\beta)_{\beta \in \Delta}$$

où

$$(k_\beta)_{\beta \in \Delta} \text{ duale de } (h_\beta)_{\beta \in \Delta} \text{ et } z_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \text{ vérifie } \kappa(x_\alpha, z_\alpha) = 1.$$

Formule de Freudenthal

Formule de Freudenthal

On fixe $\lambda \in \Lambda^{+}, \mu \in \Lambda$ et $V = Z(\lambda)$ irréductible cyclique de plus haut poids λ.

Formule de Freudenthal

On fixe $\lambda \in \Lambda^+, \mu \in \Lambda$ et $V = Z(\lambda)$ irréductible cyclique de plus haut poids λ.
Idée :

Formule de Freudenthal

On fixe $\lambda \in \Lambda^+, \mu \in \Lambda$ et $V = Z(\lambda)$ irréductible cyclique de plus haut poids λ.
Idée :

- c agit sur V par homothétie de rapport ℓ.

Formule de Freudenthal

On fixe $\lambda \in \Lambda^+, \mu \in \Lambda$ et $V = Z(\lambda)$ irréductible cyclique de plus haut poids λ.
Idée :

- c agit sur V par homothétie de rapport ℓ.
- Via les représentations de $\mathfrak{sl}_\alpha$, on montre que si $\lambda \in \Lambda$,

$$\mathrm{Tr}_{V_\mu}(x_\alpha z_\alpha) = \sum_{i=0}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha).$$

Formule de Freudenthal

On fixe $\lambda \in \Lambda^+, \mu \in \Lambda$ et $V = Z(\lambda)$ irréductible cyclique de plus haut poids λ.
Idée :

- c agit sur V par homothétie de rapport ℓ.
- Via les représentations de $\mathfrak{sl}_\alpha$, on montre que si $\lambda \in \Lambda$,

$$\mathrm{Tr}_{V_\mu}(x_\alpha z_\alpha) = \sum_{i=0}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha).$$

- On a $\mathrm{Tr}_{V_\mu}\left(\sum_{\beta \in \Delta} h_\beta k_\beta\right) = m(\mu) \sum_{\beta \in \Delta} \mu(h_\beta)\mu(k_\beta) = m(\mu)(\mu, \mu).$

Formule de Freudenthal

On fixe $\lambda \in \Lambda^+, \mu \in \Lambda$ et $V = Z(\lambda)$ irréductible cyclique de plus haut poids λ.
Idée :

- c agit sur V par homothétie de rapport ℓ.
- Via les représentations de $\mathfrak{sl}_\alpha$, on montre que si $\lambda \in \Lambda$,

$$\mathrm{Tr}_{V_\mu}(x_\alpha z_\alpha) = \sum_{i=0}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha).$$

- On a $\mathrm{Tr}_{V_\mu}\left(\sum_{\beta \in \Delta} h_\beta k_\beta\right) = m(\mu) \sum_{\beta \in \Delta} \mu(h_\beta)\mu(k_\beta) = m(\mu)(\mu, \mu)$.
- En combinant :

$$\ell m(\mu) = (\mu, \mu + 2\delta) m(\mu) + 2 \sum_{\alpha \succ 0} \sum_{i=1}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha).$$

Formule de Freudenthal

On fixe $\lambda \in \Lambda^+, \mu \in \Lambda$ et $V = Z(\lambda)$ irréductible cyclique de plus haut poids λ.
Idée :

- c agit sur V par homothétie de rapport ℓ.
- Via les représentations de $\mathfrak{sl}_\alpha$, on montre que si $\lambda \in \Lambda$,

$$\mathrm{Tr}_{V_\mu}(x_\alpha z_\alpha) = \sum_{i=0}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha).$$

- On a $\mathrm{Tr}_{V_\mu}\left(\sum_{\beta \in \Delta} h_\beta k_\beta\right) = m(\mu) \sum_{\beta \in \Delta} \mu(h_\beta)\mu(k_\beta) = m(\mu)(\mu, \mu)$.
- En combinant :

$$\ell m(\mu) = (\mu, \mu + 2\delta) m(\mu) + 2 \sum_{\alpha \succ 0} \sum_{i=1}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha).$$

- Avec $\mu = \lambda$: $\qquad \ell = (\lambda, \lambda + 2\delta)$.

Formule de Freudenthal

Formule de Freudenthal

Théorème

Si $\lambda \in \Lambda^+$ *et* $\lambda \in \Lambda$*, on a*

$$((\lambda+\delta,\lambda+\delta)-(\mu+\delta,\mu+\delta))m(\mu) = 2\sum_{\alpha\succ 0}\sum_{i=1}^{\infty} m(\mu+i\alpha)(\mu+i\alpha,\alpha).$$

Formule de Freudenthal

Théorème

Si $\lambda \in \Lambda^+$ *et* $\lambda \in \Lambda$*, on a*

$$((\lambda+\delta,\lambda+\delta)-(\mu+\delta,\mu+\delta))m(\mu) = 2\sum_{\alpha\succ 0}\sum_{i=1}^{\infty} m(\mu+i\alpha)(\mu+i\alpha,\alpha).$$

- On sait que $m(\lambda) = 1$.

Formule de Freudenthal

Théorème

Si $\lambda \in \Lambda^+$ *et* $\lambda \in \Lambda$*, on a*

$$((\lambda+\delta,\lambda+\delta)-(\mu+\delta,\mu+\delta))m(\mu)=2\sum_{\alpha\succ 0}\sum_{i=1}^{\infty}m(\mu+i\alpha)(\mu+i\alpha,\alpha).$$

- On sait que $m(\lambda) = 1$.
- Si on connaît $m(\nu)$ pour tout $\mu \underset{\neq}{\prec} \nu \prec \lambda$, la formule nous fournit $m(\mu)$.

Formule de Freudenthal

Théorème

Si $\lambda \in \Lambda^+$ *et* $\lambda \in \Lambda$, *on a*

$$((\lambda+\delta,\lambda+\delta)-(\mu+\delta,\mu+\delta))m(\mu) = 2\sum_{\alpha \succ 0}\sum_{i=1}^{\infty} m(\mu+i\alpha)(\mu+i\alpha,\alpha).$$

- On sait que $m(\lambda) = 1$.
- Si on connaît $m(\nu)$ pour tout $\mu \underset{\neq}{\prec} \nu \prec \lambda$, la formule nous fournit $m(\mu)$.

$\rightarrow$ On peut calculer $\dim V_\mu$ récursivement.

Caractère d'une représentation

Caractère d'une représentation

On se place dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Caractère d'une représentation

On se place dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition

Si $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ est une représentation de dimension finie, on pose

$$\chi_\rho : \begin{array}{ccc} \mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ h & \longmapsto & \mathrm{Tr}\left(e^{\mathrm{ad}_h}\right) \end{array}.$$

Caractère d'une représentation

On se place dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition

Si $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ est une représentation de dimension finie, on pose

$$\chi_\rho : \begin{array}{ccc} \mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ h & \longmapsto & \mathrm{Tr}\left(e^{\mathrm{ad}_h}\right) \end{array}.$$

On a

- $\chi_\rho(0) = \dim V$,

Caractère d'une représentation

On se place dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition

Si $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ est une représentation de dimension finie, on pose

$$\chi_\rho : \begin{array}{ccc} \mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ h & \longmapsto & \mathrm{Tr}\left(e^{\mathrm{ad}_h}\right) \end{array}.$$

On a

- $\chi_\rho(0) = \dim V$,
- $\chi_\rho(h) = \sum_\mu m(\mu) e^{\mu(h)}$ avec $V = \bigoplus_\mu V_\mu$.

Un exemple

Un exemple

On prend $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ et V la représentation irréductible de degré $m+1$.

Un exemple

On prend $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ et V la représentation irréductible de degré $m+1$. On a

$$V = \bigoplus_{k=0}^{m} V_{\mu-2k} \text{ avec } \dim V_{\mu-2k} = 1$$

Un exemple

On prend $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ et V la représentation irréductible de degré $m+1$. On a $V = \bigoplus_{k=0}^{m} V_{\mu-2k}$ avec $\dim V_{\mu-2k} = 1$ donc

$$\chi_V(tH) = e^{tm} + e^{t(m-2)} + \cdots + e^{-tm} = \frac{e^{t(m+1)} - e^{-t(m+1)}}{e^t - e^{-t}}.$$

Un exemple

On prend $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ et V la représentation irréductible de degré $m+1$. On a $V = \bigoplus_{k=0}^{m} V_{\mu-2k}$ avec $\dim V_{\mu-2k} = 1$ donc

$$\chi_V(tH) = e^{tm} + e^{t(m-2)} + \cdots + e^{-tm} = \frac{e^{t(m+1)} - e^{-t(m+1)}}{e^t - e^{-t}}.$$

Une telle factorisation est toujours possible !

Formule des caractères de Weyl

Formule des caractères de Weyl

Théorème (Formule des caractères)

Si $\lambda \in \Lambda^+$, on a

$$\chi_\lambda(H) = \frac{\sum_{w \in \mathcal{W}} \det(w) e^{w(\lambda+\delta)(H)}}{\sum_{w \in \mathcal{W}} \det(w) e^{w(\delta)(H)}} = \frac{\sum_{w \in \mathcal{W}} \det(w) e^{w(\lambda+\delta)(H)}}{\prod_{\alpha \in \Delta} \left(e^{\frac{1}{2}\alpha(H)} - e^{-\frac{1}{2}\alpha(H)} \right)}.$$

Formule des caractères de Weyl

Théorème (Formule des caractères)

Si $\lambda \in \Lambda^+$, *on a*

$$\chi_\lambda(H) = \frac{\displaystyle\sum_{w \in \mathcal{W}} \det(w) e^{w(\lambda+\delta)(H)}}{\displaystyle\sum_{w \in \mathcal{W}} \det(w) e^{w(\delta)(H)}} = \frac{\displaystyle\sum_{w \in \mathcal{W}} \det(w) e^{w(\lambda+\delta)(H)}}{\displaystyle\prod_{\alpha \in \Delta} \left(e^{\frac{1}{2}\alpha(H)} - e^{-\frac{1}{2}\alpha(H)}\right)}.$$

Corollaire (Formule de la dimension)

Si $\lambda \in \Lambda^+$, *on a*

$$\dim Z(\lambda) = \frac{\displaystyle\prod_{\alpha \succ 0} (\lambda+\delta, \alpha)}{\displaystyle\prod_{\alpha \succ 0} (\delta, \alpha)} = \frac{\displaystyle\prod_{\alpha \succ 0} \langle \lambda+\delta, \alpha \rangle}{\displaystyle\prod_{\alpha \succ 0} \langle \delta, \alpha \rangle}.$$