Groupes de Lie compacts

Valentin Massicot

Université de Reims Champagne-Ardenne

23 août 2025

Sommaire

Groupes de Lie

Définition

Groupe de Lie : groupe + variété différentielle avec opérations lisses.

Groupes de Lie

Définition

Groupe de Lie : groupe + variété différentielle avec opérations lisses.

Exemples :

$\mathfrak{S}_n$ $\quad \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{T}$ $\quad \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ $\quad \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ $\quad \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ $\quad \mathrm{SU}(n)$

$\mathbb{R}_+^*$ $\quad \mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$ $\quad \mathrm{SO}(n)$ $\quad \mathrm{U}(n)$ $\quad \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ $\quad \mathrm{PSL}(n, \mathbb{C})$

Groupes de Lie

Définition

Groupe de Lie : groupe + variété différentielle avec opérations lisses.

Exemples :

$$\mathfrak{S}_n \qquad \mathbb{R} \qquad \mathbb{T} \qquad \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \qquad \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{O}(n, \mathbb{R}) \qquad \mathrm{SU}(n)$$

$$\mathbb{R}_+^* \qquad \mathrm{Sp}(n, \mathbb{C}) \qquad \mathrm{SO}(n) \qquad \mathrm{U}(n) \qquad \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R}) \qquad \mathrm{PSL}(n, \mathbb{C})$$

Si G est un groupe de Lie :

Groupes de Lie

Définition

Groupe de Lie : groupe + variété différentielle avec opérations lisses.

Exemples :

$$\mathfrak{S}_n \qquad \mathbb{R} \qquad \mathbb{T} \qquad \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \qquad \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \qquad \mathrm{SU}(n)$$

$$\mathbb{R}_+^* \qquad \mathrm{Sp}(n,\mathbb{C}) \qquad \mathrm{SO}(n) \qquad \mathrm{U}(n) \qquad \mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R}) \qquad \mathrm{PSL}(n,\mathbb{C})$$

Si G est un groupe de Lie :

- $\forall g \in G, \quad h \mapsto gh, \quad h \mapsto hg, \quad h \mapsto h^{-1}$ sont des difféomorphismes,

Groupes de Lie

Définition

Groupe de Lie : groupe + variété différentielle avec opérations lisses.

Exemples :

$$\mathfrak{S}_n \qquad \mathbb{R} \qquad \mathbb{T} \qquad \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \qquad \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \qquad \mathrm{SU}(n)$$

$$\mathbb{R}_+^* \qquad \mathrm{Sp}(n,\mathbb{C}) \qquad \mathrm{SO}(n) \qquad \mathrm{U}(n) \qquad \mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R}) \qquad \mathrm{PSL}(n,\mathbb{C})$$

Si G est un groupe de Lie :

- $\forall g \in G, \quad h \mapsto gh, \quad h \mapsto hg, \quad h \mapsto h^{-1}$ sont des difféomorphismes,
- $G_0 \trianglelefteq G$,

Groupes de Lie

Définition

Groupe de Lie : groupe + variété différentielle avec opérations lisses.

Exemples :

$$\mathfrak{S}_n \qquad \mathbb{R} \qquad \mathbb{T} \qquad \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \qquad \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \qquad \mathrm{SU}(n)$$

$$\mathbb{R}_+^* \qquad \mathrm{Sp}(n,\mathbb{C}) \qquad \mathrm{SO}(n) \qquad \mathrm{U}(n) \qquad \mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R}) \qquad \mathrm{PSL}(n,\mathbb{C})$$

Si G est un groupe de Lie :

- $\forall g \in G, \quad h \mapsto gh, \quad h \mapsto hg, \quad h \mapsto h^{-1}$ sont des difféomorphismes,
- $G_0 \trianglelefteq G$,
- $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V^n \supset G_0$ pour tout voisinage V de e,

Groupes de Lie

Définition

Groupe de Lie : groupe + variété différentielle avec opérations lisses.

Exemples :

$$\mathfrak{S}_n \qquad \mathbb{R} \qquad \mathbb{T} \qquad \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \qquad \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \qquad \mathrm{SU}(n)$$

$$\mathbb{R}_+^* \qquad \mathrm{Sp}(n,\mathbb{C}) \qquad \mathrm{SO}(n) \qquad \mathrm{U}(n) \qquad \mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R}) \qquad \mathrm{PSL}(n,\mathbb{C})$$

Si G est un groupe de Lie :

- $\forall g \in G, \quad h \mapsto gh, \quad h \mapsto hg, \quad h \mapsto h^{-1}$ sont des difféomorphismes,
- $G_0 \trianglelefteq G$,
- $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V^n \supset G_0$ pour tout voisinage V de e,
- G connexe $\iff$ G connexe par arcs,

Groupes de Lie

Définition

Groupe de Lie : groupe + variété différentielle avec opérations lisses.

Exemples :

$$\mathfrak{S}_n \qquad \mathbb{R} \qquad \mathbb{T} \qquad \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \qquad \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \qquad \mathrm{SU}(n)$$

$$\mathbb{R}_+^* \qquad \mathrm{Sp}(n,\mathbb{C}) \qquad \mathrm{SO}(n) \qquad \mathrm{U}(n) \qquad \mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R}) \qquad \mathrm{PSL}(n,\mathbb{C})$$

Si G est un groupe de Lie :

- $\forall g \in G, \quad h \mapsto gh, \quad h \mapsto hg, \quad h \mapsto h^{-1}$ sont des difféomorphismes,
- $G_0 \trianglelefteq G$,
- $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V^n \supset G_0$ pour tout voisinage V de e,
- G connexe $\iff$ G connexe par arcs,
- Tout sous-groupe distingué discret est central.

Algèbre de Lie

G : groupe de Lie $\qquad$ $\mathfrak{g}$: espace tangent à G en e.

Algèbre de Lie

G : groupe de Lie

$\mathfrak{g}$: espace tangent à G en e.

$X \in \mathfrak{g}$

Algèbre de Lie

G : groupe de Lie $\mathfrak{g}$: espace tangent à G en e.

$$X \in \mathfrak{g} \longleftrightarrow \tilde{X} = [x \mapsto T_e L_x(X)] \in \Gamma_{\mathrm{inv}}(TG)$$

Algèbre de Lie

G : groupe de Lie $\qquad$ $\mathfrak{g}$: espace tangent à G en e.

$$X \in \mathfrak{g} \longleftrightarrow \tilde{X} = [x \mapsto T_e L_x(X)] \in \Gamma_{\mathrm{inv}}(TG)$$
$$\longleftrightarrow \alpha_X : \mathbb{R} \to G \text{ tel que } \begin{cases} \dot{\alpha_X}(t) = \tilde{X}(\alpha_X(t)) \\ \alpha_X(0) = e \end{cases}$$

Algèbre de Lie

G : groupe de Lie $\qquad$ $\mathfrak{g}$: espace tangent à G en e.

$$X \in \mathfrak{g} \longleftrightarrow \tilde{X} = [x \mapsto T_e L_x(X)] \in \Gamma_{\mathrm{inv}}(TG)$$

$$\longleftrightarrow \alpha_X : \mathbb{R} \to G \text{ tel que } \begin{cases} \dot{\alpha_X}(t) = \tilde{X}(\alpha_X(t)) \\ \alpha_X(0) = e \end{cases}$$

$\to$ Bijection entre $\mathfrak{g}$ et $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, G)$ via $X \mapsto \alpha_X$, de réciproque $\alpha \mapsto \dot{\alpha}(0)$.

Algèbre de Lie

G : groupe de Lie $\qquad$ $\mathfrak{g}$: espace tangent à G en e.

$$X \in \mathfrak{g} \longleftrightarrow \tilde{X} = [x \mapsto T_e L_x(X)] \in \Gamma_{\mathrm{inv}}(TG)$$
$$\longleftrightarrow \alpha_X : \mathbb{R} \to G \text{ tel que } \begin{cases} \dot{\alpha_X}(t) = \tilde{X}(\alpha_X(t)) \\ \alpha_X(0) = e \end{cases}$$

$\rightarrow$ Bijection entre $\mathfrak{g}$ et $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, G)$ via $X \mapsto \alpha_X$, de réciproque $\alpha \mapsto \dot{\alpha}(0)$.
$\rightarrow$ Isomorphisme linéaire entre $\mathfrak{g}$ et $\Gamma_{\mathrm{inv}}(TG)$.

Algèbre de Lie

G : groupe de Lie $\qquad\qquad$ $\mathfrak{g}$: espace tangent à G en e.

$$X \in \mathfrak{g} \longleftrightarrow \tilde{X} = [x \mapsto T_e L_x(X)] \in \Gamma_{\mathrm{inv}}(TG)$$

$$\longleftrightarrow \alpha_X : \mathbb{R} \to G \text{ tel que } \begin{cases} \dot{\alpha_X}(t) = \tilde{X}(\alpha_X(t)) \\ \alpha_X(0) = e \end{cases}$$

$\to$ Bijection entre $\mathfrak{g}$ et $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, G)$ via $X \mapsto \alpha_X$, de réciproque $\alpha \mapsto \dot{\alpha}(0)$.
$\to$ Isomorphisme linéaire entre $\mathfrak{g}$ et $\Gamma_{\mathrm{inv}}(TG)$.
On transporte la structure d'algèbre de Lie de $\Gamma_{\mathrm{inv}}(TG)$ à $\mathfrak{g}$.

Algèbre de Lie

G : groupe de Lie $\qquad$ $\mathfrak{g}$: espace tangent à G en e.

$$X \in \mathfrak{g} \longleftrightarrow \tilde{X} = [x \mapsto T_e L_x(X)] \in \Gamma_{\mathrm{inv}}(TG)$$

$$\longleftrightarrow \alpha_X : \mathbb{R} \to G \text{ tel que } \begin{cases} \dot{\alpha_X}(t) = \tilde{X}(\alpha_X(t)) \\ \alpha_X(0) = e \end{cases}$$

$\to$ Bijection entre $\mathfrak{g}$ et $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, G)$ via $X \mapsto \alpha_X$, de réciproque $\alpha \mapsto \dot{\alpha}(0)$.
$\to$ Isomorphisme linéaire entre $\mathfrak{g}$ et $\Gamma_{\mathrm{inv}}(TG)$.
On transporte la structure d'algèbre de Lie de $\Gamma_{\mathrm{inv}}(TG)$ à $\mathfrak{g}$.

Proposition

Si $f : G \to H$ est un morphisme lisse alors $T_e f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ est un morphisme d'algèbres de Lie.

Algèbre de Lie

G : groupe de Lie $\qquad$ $\mathfrak{g}$: espace tangent à G en e.

$$X \in \mathfrak{g} \longleftrightarrow \tilde{X} = [x \mapsto T_e L_x(X)] \in \Gamma_{\mathrm{inv}}(TG)$$
$$\longleftrightarrow \alpha_X : \mathbb{R} \to G \text{ tel que } \begin{cases} \dot{\alpha_X}(t) = \tilde{X}(\alpha_X(t)) \\ \alpha_X(0) = e \end{cases}$$

$\to$ Bijection entre $\mathfrak{g}$ et $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, G)$ via $X \mapsto \alpha_X$, de réciproque $\alpha \mapsto \dot{\alpha}(0)$.
$\to$ Isomorphisme linéaire entre $\mathfrak{g}$ et $\Gamma_{\mathrm{inv}}(TG)$.
On transporte la structure d'algèbre de Lie de $\Gamma_{\mathrm{inv}}(TG)$ à $\mathfrak{g}$.

Proposition

Si $f : G \to H$ est un morphisme lisse alors $T_e f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ est un morphisme d'algèbres de Lie.

Par exemple :

Algèbre de Lie

G : groupe de Lie $\qquad\qquad$ $\mathfrak{g}$: espace tangent à G en e.

$$X \in \mathfrak{g} \longleftrightarrow \tilde{X} = [x \mapsto T_e L_x(X)] \in \Gamma_{\mathrm{inv}}(TG)$$
$$\longleftrightarrow \alpha_X : \mathbb{R} \to G \text{ tel que } \begin{cases} \dot{\alpha_X}(t) = \tilde{X}(\alpha_X(t)) \\ \alpha_X(0) = e \end{cases}$$

$\to$ Bijection entre $\mathfrak{g}$ et $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, G)$ via $X \mapsto \alpha_X$, de réciproque $\alpha \mapsto \dot{\alpha}(0)$.
$\to$ Isomorphisme linéaire entre $\mathfrak{g}$ et $\Gamma_{\mathrm{inv}}(TG)$.
On transporte la structure d'algèbre de Lie de $\Gamma_{\mathrm{inv}}(TG)$ à $\mathfrak{g}$.

Proposition

Si $f : G \to H$ est un morphisme lisse alors $T_e f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ est un morphisme d'algèbres de Lie.

Par exemple :

- pour Ad : $\begin{array}{ccc} G & \to & \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \\ x & \mapsto & [X \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x\alpha_X(t)x^{-1}] \end{array}$, on obtient ad : $\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{gl}(g) \\ X & \mapsto & [X, \cdot] \end{array}$,

Algèbre de Lie

G : groupe de Lie $\qquad$ $\mathfrak{g}$: espace tangent à G en e.

$$X \in \mathfrak{g} \longleftrightarrow \tilde{X} = [x \mapsto T_e L_x(X)] \in \Gamma_{\mathrm{inv}}(TG)$$
$$\longleftrightarrow \alpha_X : \mathbb{R} \to G \text{ tel que } \begin{cases} \dot{\alpha_X}(t) = \tilde{X}(\alpha_X(t)) \\ \alpha_X(0) = e \end{cases}$$

$\to$ Bijection entre $\mathfrak{g}$ et $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, G)$ via $X \mapsto \alpha_X$, de réciproque $\alpha \mapsto \dot{\alpha}(0)$.
$\to$ Isomorphisme linéaire entre $\mathfrak{g}$ et $\Gamma_{\mathrm{inv}}(TG)$.
On transporte la structure d'algèbre de Lie de $\Gamma_{\mathrm{inv}}(TG)$ à $\mathfrak{g}$.

Proposition

Si $f : G \to H$ est un morphisme lisse alors $T_e f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ est un morphisme d'algèbres de Lie.

Par exemple :

- pour Ad : $\begin{array}{ccc} G & \to & \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \\ x & \mapsto & [X \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x\alpha_X(t)x^{-1}] \end{array}$, on obtient ad : $\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{gl}(g) \\ X & \mapsto & [X, \cdot] \end{array}$,
- une représentation $G \to \mathrm{GL}(V)$ induit une représentation $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

Lien entre G et $\mathfrak{g}$

Lien entre G et $\mathfrak{g}$

Définition

On pose

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \to & G \\ X & \mapsto & \alpha_X(1) \end{array}.$$

Lien entre G et $\mathfrak{g}$

Définition

On pose

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \to & G \\ X & \mapsto & \alpha_X(1) \end{array}.$$

- $\exp \in C^\infty(\mathfrak{g}, G), \qquad \alpha_X(t) = \exp(tX), \qquad T_0 \exp = \mathrm{id}.$

Lien entre G et $\mathfrak{g}$

Définition

On pose

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \to & G \\ X & \mapsto & \alpha_X(1) \end{array}.$$

- $\exp \in C^\infty(\mathfrak{g}, G), \qquad \alpha_X(t) = \exp(tX), \qquad T_0 \exp = \mathrm{id}.$
- exp est un difféomorphisme local, $\langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle = G_0$.

Lien entre G et $\mathfrak{g}$

Définition

On pose

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \to & G \\ X & \mapsto & \alpha_X(1) \end{array}.$$

- $\exp \in C^\infty(\mathfrak{g}, G), \quad \alpha_X(t) = \exp(tX), \quad T_0 \exp = \mathrm{id}.$
- $\exp$ est un difféomorphisme local, $\langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle = G_0$.
- Si $f \in \mathrm{Hom}(G, H)$, $f \circ \exp_G = \exp_H \circ T_e f \quad (\mathrm{Ad}(\exp(X)) = \exp(\mathrm{ad}(X)))$.

Lien entre G et $\mathfrak{g}$

Définition

On pose

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \to & G \\ X & \mapsto & \alpha_X(1) \end{array}.$$

- $\exp \in C^\infty(\mathfrak{g}, G), \quad \alpha_X(t) = \exp(tX), \quad T_0 \exp = \mathrm{id}.$
- exp est un difféomorphisme local, $\langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle = G_0$.
- Si $f \in \mathrm{Hom}(G, H)$, $f \circ \exp_G = \exp_H \circ T_e f \quad (\mathrm{Ad}(\exp(X)) = \exp(\mathrm{ad}(X)))$.

Pour remonter de $\mathfrak{g}$ à G :

Lien entre G et $\mathfrak{g}$

Définition

On pose

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \to & G \\ X & \mapsto & \alpha_X(1) \end{array}.$$

- $\exp \in C^\infty(\mathfrak{g}, G), \quad \alpha_X(t) = \exp(tX), \quad T_0 \exp = \mathrm{id}.$
- $\exp$ est un difféomorphisme local, $\langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle = G_0$.
- Si $f \in \mathrm{Hom}(G, H)$, $f \circ \exp_G = \exp_H \circ T_e f \quad (\mathrm{Ad}(\exp(X)) = \exp(\mathrm{ad}(X)))$.

Pour remonter de $\mathfrak{g}$ à G : connexité.

Lien entre G et $\mathfrak{g}$

Définition

On pose

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \to & G \\ X & \mapsto & \alpha_X(1) \end{array}.$$

- $\exp \in C^\infty(\mathfrak{g}, G), \quad \alpha_X(t) = \exp(tX), \quad T_0 \exp = \mathrm{id}.$
- exp est un difféomorphisme local, $\langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle = G_0$.
- Si $f \in \mathrm{Hom}(G, H)$, $f \circ \exp_G = \exp_H \circ T_e f \quad (\mathrm{Ad}(\exp(X)) = \exp(\mathrm{ad}(X)))$.

Pour remonter de $\mathfrak{g}$ à G : connexité.
Par exemple, si G connexe :

Lien entre G et $\mathfrak{g}$

Définition

On pose

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \to & G \\ X & \mapsto & \alpha_X(1) \end{array}.$$

- $\exp \in C^\infty(\mathfrak{g}, G), \quad \alpha_X(t) = \exp(tX), \quad T_0 \exp = \mathrm{id}.$
- exp est un difféomorphisme local, $\langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle = G_0$.
- Si $f \in \mathrm{Hom}(G, H)$, $f \circ \exp_G = \exp_H \circ T_e f \quad (\mathrm{Ad}(\exp(X)) = \exp(\mathrm{ad}(X)))$.

Pour remonter de $\mathfrak{g}$ à G : connexité.
Par exemple, si G connexe :

- si $f, g \in \mathrm{Hom}(G, H), \quad T_e f = T_e g \iff f = g$,

Lien entre G et $\mathfrak{g}$

Définition

On pose

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \to & G \\ X & \mapsto & \alpha_X(1) \end{array}.$$

- $\exp \in C^\infty(\mathfrak{g}, G)$, $\quad \alpha_X(t) = \exp(tX)$, $\quad T_0 \exp = \mathrm{id}$.
- exp est un difféomorphisme local, $\langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle = G_0$.
- Si $f \in \mathrm{Hom}(G, H)$, $f \circ \exp_G = \exp_H \circ T_e f \quad (\mathrm{Ad}(\exp(X)) = \exp(\mathrm{ad}(X)))$.

Pour remonter de $\mathfrak{g}$ à G : connexité.
Par exemple, si G connexe :

- si $f, g \in \mathrm{Hom}(G, H)$, $\quad T_e f = T_e g \iff f = g$,
- sous-espace stable par $G \iff$ sous-espace stable par $\mathfrak{g}$,

Lien entre G et $\mathfrak{g}$

Définition

On pose

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \to & G \\ X & \mapsto & \alpha_X(1) \end{array}.$$

- $\exp \in C^\infty(\mathfrak{g}, G), \quad \alpha_X(t) = \exp(tX), \quad T_0 \exp = \mathrm{id}.$
- exp est un difféomorphisme local, $\langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle = G_0$.
- Si $f \in \mathrm{Hom}(G, H)$, $f \circ \exp_G = \exp_H \circ T_e f \quad (\mathrm{Ad}(\exp(X)) = \exp(\mathrm{ad}(X)))$.

Pour remonter de $\mathfrak{g}$ à G : connexité.
Par exemple, si G connexe :

- si $f, g \in \mathrm{Hom}(G, H), \quad T_e f = T_e g \iff f = g$,
- sous-espace stable par $G \iff$ sous-espace stable par $\mathfrak{g}$,
- V irréductible pour $G \iff V$ irréductible pour $\mathfrak{g}$,

Lien entre G et $\mathfrak{g}$

Définition

On pose

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \to & G \\ X & \mapsto & \alpha_X(1) \end{array}.$$

- $\exp \in C^\infty(\mathfrak{g}, G)$, $\quad \alpha_X(t) = \exp(tX)$, $\quad T_0 \exp = \mathrm{id}$.
- exp est un difféomorphisme local, $\langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle = G_0$.
- Si $f \in \mathrm{Hom}(G, H)$, $f \circ \exp_G = \exp_H \circ T_e f \quad (\mathrm{Ad}(\exp(X)) = \exp(\mathrm{ad}(X)))$.

Pour remonter de $\mathfrak{g}$ à G : connexité.
Par exemple, si G connexe :

- si $f, g \in \mathrm{Hom}(G, H)$, $\quad T_e f = T_e g \iff f = g$,
- sous-espace stable par $G \iff$ sous-espace stable par $\mathfrak{g}$,
- V irréductible pour $G \iff V$ irréductible pour $\mathfrak{g}$,
- G est abélien $\iff \mathfrak{g}$ est abélienne,

Lien entre G et $\mathfrak{g}$

Définition

On pose

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \to & G \\ X & \mapsto & \alpha_X(1) \end{array}.$$

- $\exp \in C^\infty(\mathfrak{g}, G)$, $\alpha_X(t) = \exp(tX)$, $T_0 \exp = \mathrm{id}$.
- exp est un difféomorphisme local, $\langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle = G_0$.
- Si $f \in \mathrm{Hom}(G, H)$, $f \circ \exp_G = \exp_H \circ T_e f \quad (\mathrm{Ad}(\exp(X)) = \exp(\mathrm{ad}(X)))$.

Pour remonter de $\mathfrak{g}$ à G : connexité.
Par exemple, si G connexe :

- si $f, g \in \mathrm{Hom}(G, H)$, $T_e f = T_e g \iff f = g$,
- sous-espace stable par $G \iff$ sous-espace stable par $\mathfrak{g}$,
- V irréductible pour $G \iff V$ irréductible pour $\mathfrak{g}$,
- G est abélien $\iff \mathfrak{g}$ est abélienne,
- si G est linéaire et $\mathfrak{g}$ est complètement résoluble, G est cotrigonalisable.

L'application exponentielle (cas matriciel)

On considère $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

L'application exponentielle (cas matriciel)

On considère $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Pour $X \in \mathfrak{g} = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\forall A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \quad \tilde{X}(A) = T_{I_n} L_A(X) = L_A(X) = AX$$

donc on veut résoudre

$$\begin{cases} \alpha'_X(t) = \alpha_X(t) X, \\ \alpha_X(0) = I_n. \end{cases}$$

L'application exponentielle (cas matriciel)

On considère $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Pour $X \in \mathfrak{g} = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\forall A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \quad \tilde{X}(A) = T_{I_n} L_A(X) = L_A(X) = AX$$

donc on veut résoudre

$$\begin{cases} \alpha_X'(t) = \alpha_X(t) X, \\ \alpha_X(0) = I_n. \end{cases}$$

Classiquement,

$$\alpha_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} X^n$$

L'application exponentielle (cas matriciel)

On considère $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Pour $X \in \mathfrak{g} = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\forall A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \quad \tilde{X}(A) = T_{I_n} L_A(X) = L_A(X) = AX$$

donc on veut résoudre

$$\begin{cases} \alpha_X'(t) = \alpha_X(t)X, \\ \alpha_X(0) = I_n. \end{cases}$$

Classiquement,

$$\alpha_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} X^n$$

d'où

$$\exp_G(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} X^n = \exp(X).$$

L'application exponentielle (cas matriciel)

On considère $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Pour $X \in \mathfrak{g} = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\forall A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \quad \tilde{X}(A) = T_{I_n} L_A(X) = L_A(X) = AX$$

donc on veut résoudre

$$\begin{cases} \alpha'_X(t) = \alpha_X(t) X, \\ \alpha_X(0) = I_n. \end{cases}$$

Classiquement,

$$\alpha_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} X^n$$

d'où

$$\exp_G(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} X^n = \exp(X).$$

Si $H \subset G$ est un groupe de Lie linéaire,

$$\forall Y \in \mathfrak{h}, \quad \exp_H(Y) = \iota \circ \exp_H(Y) = \exp_G \circ T_e \iota(Y) = \exp_G(Y).$$

Revêtements

Revêtements

G : connexe, $p : H \to G$ revêtement connexe , $\tilde{p} : \tilde{G} \to G$: revêtement universel.

Revêtements

G : connexe, $p : H \to G$ revêtement connexe , $\tilde{p} : \tilde{G} \to G$: revêtement universel.

$p, \tilde{p}$ sont des homéo. locaux : la structure de variété de G se transporte à H et $\tilde{G}$.

Revêtements

G : connexe, $p : H \to G$ revêtement connexe , $\tilde{p} : \tilde{G} \to G$: revêtement universel.

$p, \tilde{p}$ sont des homéo. locaux : la structure de variété de G se transporte à H et $\tilde{G}$.

Théorème

Si $e_H \in p^{-1}(\{e\})$, il existe une unique structure de groupe sur H dont l'élément neutre est e_H et tel que p soit un morphisme de groupes.

Revêtements

G : connexe, $p : H \to G$ revêtement connexe , $\tilde{p} : \tilde{G} \to G$: revêtement universel.

$p, \tilde{p}$ sont des homéo. locaux : la structure de variété de G se transporte à H et $\tilde{G}$.

Théorème

Si $e_H \in p^{-1}(\{e\})$, il existe une unique structure de groupe sur H dont l'élément neutre est e_H et tel que p soit un morphisme de groupes.

Démonstration :

Revêtements

G : connexe, $p : H \to G$ revêtement connexe , $\tilde{p} : \tilde{G} \to G$: revêtement universel.

$p, \tilde{p}$ sont des homéo. locaux : la structure de variété de G se transporte à H et $\tilde{G}$.

Théorème

Si $e_H \in p^{-1}(\{e\})$, il existe une unique structure de groupe sur H dont l'élément neutre est e_H et tel que p soit un morphisme de groupes.

<u>Démonstration</u> : On montre d'abord le résultat pour $\tilde{G}$. On va utiliser :

Revêtements

G : connexe, $p : H \to G$ revêtement connexe , $\tilde{p} : \tilde{G} \to G$: revêtement universel.

$p, \tilde{p}$ sont des homéo. locaux : la structure de variété de G se transporte à H et $\tilde{G}$.

Théorème

Si $e_H \in p^{-1}(\{e\})$, il existe une unique structure de groupe sur H dont l'élément neutre est e_H et tel que p soit un morphisme de groupes.

Démonstration : On montre d'abord le résultat pour $\tilde{G}$. On va utiliser :

Lemme

Soient $p : E \to B$ un revêtement connexe, X un espace topologique connexe et localement connexe par arcs, $f : X \to B$ continue, $x \in B$ et $y \in p^{-1}(f(x))$.
Il existe un relèvement $\tilde{f} : X \to E$ tel que $\tilde{f}(x) = y$ si et seulement si

$$f_*(\pi_1(X, x)) \subset p_*(\pi_1(E, y)).$$

On considère $\overline{m} = m \circ (\tilde{p} \times \tilde{p}) : \begin{array}{ccc} \tilde{G} \times \tilde{G} & \to & G \\ (x, y) & \mapsto & \tilde{p}(x)\tilde{p}(y) \end{array}$.

On considère $\overline{m} = m \circ (\tilde{p} \times \tilde{p}) : \begin{array}{ccc} \tilde{G} \times \tilde{G} & \to & G \\ (x, y) & \mapsto & \tilde{p}(x)\tilde{p}(y) \end{array}$.

$\pi_1(\tilde{G} \times \tilde{G}) = \pi_1(\tilde{G}) \times \pi_1(\tilde{G}) = 0$

On considère $\overline{m} = m \circ (\tilde{p} \times \tilde{p}) : \begin{array}{ccc} \tilde{G} \times \tilde{G} & \to & G \\ (x, y) & \mapsto & \tilde{p}(x)\tilde{p}(y) \end{array}$.

$\pi_1(\tilde{G} \times \tilde{G}) = \pi_1(\tilde{G}) \times \pi_1(\tilde{G}) = 0$ donc $\overline{m}_*(\pi_1(\tilde{G} \times \tilde{G})) \subset \tilde{p}_*(\pi_1(\tilde{G}))$.

On considère $\overline{m} = m \circ (\tilde{p} \times \tilde{p}) : \begin{array}{ccc} \tilde{G} \times \tilde{G} & \to & G \\ (x, y) & \mapsto & \tilde{p}(x)\tilde{p}(y) \end{array}$.

$\pi_1(\tilde{G} \times \tilde{G}) = \pi_1(\tilde{G}) \times \pi_1(\tilde{G}) = 0$ donc $\overline{m}_*(\pi_1(\tilde{G} \times \tilde{G})) \subset \tilde{p}_*(\pi_1(\tilde{G}))$.

On obtient $\tilde{m} : \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}$ telle que $\left\{ \begin{array}{l} \tilde{m}(\tilde{e}, \tilde{e}) = \tilde{e} \\ p(\tilde{m}(x, y)) = p(x)p(y) \end{array} \right.$.

On considère $\overline{m} = m \circ (\tilde{p} \times \tilde{p}) : \begin{array}{ccc} \tilde{G} \times \tilde{G} & \to & G \\ (x, y) & \mapsto & \tilde{p}(x)\tilde{p}(y) \end{array}$.

$\pi_1(\tilde{G} \times \tilde{G}) = \pi_1(\tilde{G}) \times \pi_1(\tilde{G}) = 0$ donc $\overline{m}_*(\pi_1(\tilde{G} \times \tilde{G})) \subset \tilde{p}_*(\pi_1(\tilde{G}))$.

On obtient $\tilde{m} : \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}$ telle que $\left\{ \begin{array}{l} \tilde{m}(\tilde{e}, \tilde{e}) = \tilde{e} \\ p(\tilde{m}(x, y)) = p(x)p(y) \end{array} \right.$.

On montre que $(\tilde{G}, \tilde{m})$ est un groupe via l'unicité des relevés.

On considère $\overline{m} = m \circ (\tilde{p} \times \tilde{p}) : \begin{array}{ccc} \tilde{G} \times \tilde{G} & \to & G \\ (x, y) & \mapsto & \tilde{p}(x)\tilde{p}(y) \end{array}$.

$\pi_1(\tilde{G} \times \tilde{G}) = \pi_1(\tilde{G}) \times \pi_1(\tilde{G}) = 0$ donc $\overline{m}_*(\pi_1(\tilde{G} \times \tilde{G})) \subset \tilde{p}_*(\pi_1(\tilde{G}))$.

On obtient $\tilde{m} : \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}$ telle que $\left\{ \begin{array}{l} \tilde{m}(\tilde{e}, \tilde{e}) = \tilde{e} \\ p(\tilde{m}(x, y)) = p(x)p(y) \end{array} \right.$.

On montre que $(\tilde{G}, \tilde{m})$ est un groupe via l'unicité des relevés.

Pour le cas général, on pose $m_H : H \times H \to G$.
Si $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \pi_1(H \times H, (e_H, e_H))$, on considère le diagramme

On considère $\overline{m} = m \circ (\tilde{p} \times \tilde{p}) : \begin{array}{ccc} \tilde{G} \times \tilde{G} & \to & G \\ (x, y) & \mapsto & \tilde{p}(x)\tilde{p}(y) \end{array}$.
$\pi_1(\tilde{G} \times \tilde{G}) = \pi_1(\tilde{G}) \times \pi_1(\tilde{G}) = 0$ donc $\overline{m}_*(\pi_1(\tilde{G} \times \tilde{G})) \subset \tilde{p}_*(\pi_1(\tilde{G}))$.

On obtient $\tilde{m} : \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}$ telle que $\left\{ \begin{array}{l} \tilde{m}(\tilde{e}, \tilde{e}) = \tilde{e} \\ p(\tilde{m}(x, y)) = p(x)p(y) \end{array} \right.$.
On montre que $(\tilde{G}, \tilde{m})$ est un groupe via l'unicité des relevés.

Pour le cas général, on pose $m_H : H \times H \to G$.
Si $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \pi_1(H \times H, (e_H, e_H))$, on considère le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
 & G & H \times H \arrow[l, "m \circ (p \times p)"'] \\
H \arrow[ur, "p"] & & \\
 & \tilde{G} \times \tilde{G} \arrow[ul, "\pi \circ \tilde{m}"] \arrow[uu, "\tilde{p} \circ \tilde{m}"'] \arrow[uur, "\pi \times \pi"'] & \mathbb{R} \arrow[l, "\tilde{\gamma}"] \arrow[uu, "\gamma"']
\end{tikzcd}
$$

$\square$

On considère $\overline{m} = m \circ (\tilde{p} \times \tilde{p}) : \begin{array}{ccc} \tilde{G} \times \tilde{G} & \to & G \\ (x, y) & \mapsto & \tilde{p}(x)\tilde{p}(y) \end{array}$.

$\pi_1(\tilde{G} \times \tilde{G}) = \pi_1(\tilde{G}) \times \pi_1(\tilde{G}) = 0$ donc $\overline{m}_*(\pi_1(\tilde{G} \times \tilde{G})) \subset \tilde{p}_*(\pi_1(\tilde{G}))$.

On obtient $\tilde{m} : \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}$ telle que $\left\{ \begin{array}{l} \tilde{m}(\tilde{e}, \tilde{e}) = \tilde{e} \\ p(\tilde{m}(x, y)) = p(x)p(y) \end{array} \right.$.

On montre que $(\tilde{G}, \tilde{m})$ est un groupe via l'unicité des relevés.

Pour le cas général, on pose $m_H : H \times H \to G$.
Si $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \pi_1(H \times H, (e_H, e_H))$, on considère le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & G & & H \times H \arrow[ll, "m\circ(p\times p)"'] \\
H \arrow[ur, "p"] & & & \\
 & \tilde{G} \times \tilde{G} \arrow[ul, "\pi\circ\tilde{m}"] \arrow[uu, "\tilde{p}\circ\tilde{m}"'] \arrow[uurr, "\pi\times\pi"'] & & \mathbb{R} \arrow[ll, "\tilde{\gamma}"] \arrow[uu, "\gamma"']
\end{tikzcd}$$

On a $(m \circ p \times p) \circ \gamma = p \circ (\pi \circ \tilde{m} \circ \tilde{\gamma})$ donc l'application m se relève. $\square$

Revêtement

Revêtement

Utilité de la simple connexité : passer de $\mathfrak{g}$ à G pour les morphismes.

Revêtement

Utilité de la simple connexité : passer de $\mathfrak{g}$ à G pour les morphismes.

Proposition

Si G et H sont deux groupes de Lie avec G simplement connexe et si $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ est un morphisme d'algèbres de Lie alors il existe un (unique) morphisme de groupes $\Phi : G \to H$ tel que $T_e\Phi = \varphi$.

Revêtement

Utilité de la simple connexité : passer de $\mathfrak{g}$ à G pour les morphismes.

Proposition

Si G et H sont deux groupes de Lie avec G simplement connexe et si $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ est un morphisme d'algèbres de Lie alors il existe un (unique) morphisme de groupes $\Phi : G \to H$ tel que $T_e\Phi = \varphi$.

On en tire :

Revêtement

Utilité de la simple connexité : passer de $\mathfrak{g}$ à G pour les morphismes.

Proposition

Si G et H sont deux groupes de Lie avec G simplement connexe et si $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ est un morphisme d'algèbres de Lie alors il existe un (unique) morphisme de groupes $\Phi : G \to H$ tel que $T_e\Phi = \varphi$.

On en tire :

Proposition

Si G et H sont deux groupes de Lie alors

$$\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{h} \iff \tilde{G} \simeq \tilde{H}.$$

Revêtement

Utilité de la simple connexité : passer de $\mathfrak{g}$ à G pour les morphismes.

Proposition

Si G et H sont deux groupes de Lie avec G simplement connexe et si $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ est un morphisme d'algèbres de Lie alors il existe un (unique) morphisme de groupes $\Phi : G \to H$ tel que $T_e\Phi = \varphi$.

On en tire :

Proposition

Si G et H sont deux groupes de Lie alors

$$\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{h} \iff \tilde{G} \simeq \tilde{H}.$$

On descend de $\tilde{G}$ à G via :

Revêtement

Utilité de la simple connexité : passer de $\mathfrak{g}$ à G pour les morphismes.

Proposition

Si G et H sont deux groupes de Lie avec G simplement connexe et si $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ est un morphisme d'algèbres de Lie alors il existe un (unique) morphisme de groupes $\Phi : G \to H$ tel que $T_e\Phi = \varphi$.

On en tire :

Proposition

Si G et H sont deux groupes de Lie alors

$$\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{h} \iff \tilde{G} \simeq \tilde{H}.$$

On descend de $\tilde{G}$ à G via :

Proposition

Les groupes de Lie ayant $\mathfrak{g}$ comme algèbre de Lie sont les quotients de $\tilde{G}$ par un sous-groupe central discret.

Le cas G abélien

Le cas G abélien

Théorème

Si G est un groupe de Lie abélien connexe, il existe $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $G \simeq \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^l$.

Le cas G abélien

Théorème

Si G est un groupe de Lie abélien connexe, il existe $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $G \simeq \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^l$.

Démonstration :

Le cas G abélien

Théorème

Si G est un groupe de Lie abélien connexe, il existe $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $G \simeq \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^l$.

Démonstration :

- G abélien $\implies$ exp est un morphisme de groupes.

Le cas G abélien

Théorème

Si G est un groupe de Lie abélien connexe, il existe $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $G \simeq \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^l$.

Démonstration :

- G abélien $\implies$ exp est un morphisme de groupes.
- $\langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle = G \implies$ exp est surjectif.

Le cas G abélien

Théorème

Si G est un groupe de Lie abélien connexe, il existe $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $G \simeq \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^l$.

Démonstration :

- G abélien $\implies$ exp est un morphisme de groupes.
- $\langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle = G \implies$ exp est surjectif.
- exp est un difféomorphisme local $\implies$ $\ker(\exp) \subset \mathfrak{g}$ est discret.

Le cas G abélien

Théorème

Si G est un groupe de Lie abélien connexe, il existe $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $G \simeq \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^l$.

Démonstration :

- G abélien $\implies$ exp est un morphisme de groupes.
- $\langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle = G \implies$ exp est surjectif.
- exp est un difféomorphisme local $\implies$ $\ker(\exp) \subset \mathfrak{g}$ est discret.

En identifiant $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^n$ et $\ker(\exp) \simeq \{0\}^k \times \mathbb{Z}^l$, on obtient

$$G \simeq \mathfrak{g}/\ker(\exp) \simeq \mathbb{R}^n/(\{0\}^k \times \mathbb{Z}^l) \simeq \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^l.$$

□

Le cas G abélien

Théorème

Si G est un groupe de Lie abélien connexe, il existe $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $G \simeq \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^l$.

Démonstration :

- G abélien $\Longrightarrow$ exp est un morphisme de groupes.
- $\langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle = G \Longrightarrow$ exp est surjectif.
- exp est un difféomorphisme local $\Longrightarrow$ $\ker(\exp) \subset \mathfrak{g}$ est discret.

En identifiant $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^n$ et $\ker(\exp) \simeq \{0\}^k \times \mathbb{Z}^l$, on obtient

$$G \simeq \mathfrak{g}/\ker(\exp) \simeq \mathbb{R}^n/(\{0\}^k \times \mathbb{Z}^l) \simeq \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^l.$$

□

Théorème

Si G est un groupe de Lie abélien compact, il existe un groupe abélien fini Γ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $G \simeq \mathbb{T}^k \times \Gamma$.

Le cas G abélien

Théorème

Si G est un groupe de Lie abélien connexe, il existe $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $G \simeq \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^l$.

<u>Démonstration</u> :

- G abélien $\implies$ exp est un morphisme de groupes.
- $\langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle = G \implies$ exp est surjectif.
- exp est un difféomorphisme local $\implies \ker(\exp) \subset \mathfrak{g}$ est discret.

En identifiant $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^n$ et $\ker(\exp) \simeq \{0\}^k \times \mathbb{Z}^l$, on obtient

$$G \simeq \mathfrak{g}/\ker(\exp) \simeq \mathbb{R}^n/(\{0\}^k \times \mathbb{Z}^l) \simeq \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^l.$$

□

Théorème

Si G est un groupe de Lie abélien compact, il existe un groupe abélien fini Γ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $G \simeq \mathbb{T}^k \times \Gamma$.

<u>Démonstration</u> :

Le cas G abélien

Théorème

Si G est un groupe de Lie abélien connexe, il existe $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $G \simeq \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^l$.

Démonstration :

- G abélien $\implies$ exp est un morphisme de groupes.
- $\langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle = G \implies$ exp est surjectif.
- exp est un difféomorphisme local $\implies \ker(\exp) \subset \mathfrak{g}$ est discret.

En identifiant $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^n$ et $\ker(\exp) \simeq \{0\}^k \times \mathbb{Z}^l$, on obtient

$$G \simeq \mathfrak{g}/\ker(\exp) \simeq \mathbb{R}^n/(\{0\}^k \times \mathbb{Z}^l) \simeq \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^l. \qquad \square$$

Théorème

Si G est un groupe de Lie abélien compact, il existe un groupe abélien fini Γ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $G \simeq \mathbb{T}^k \times \Gamma$.

Démonstration :

- La suite exacte $0 \to G_0 \to G \to G/G_0 \to 0$ se scinde donc $G \simeq G_0 \times G/G_0$.

Le cas G abélien

Théorème

Si G est un groupe de Lie abélien connexe, il existe $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $G \simeq \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^l$.

Démonstration :

- G abélien $\implies$ exp est un morphisme de groupes.
- $\langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle = G \implies$ exp est surjectif.
- exp est un difféomorphisme local $\implies \ker(\exp) \subset \mathfrak{g}$ est discret.

En identifiant $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^n$ et $\ker(\exp) \simeq \{0\}^k \times \mathbb{Z}^l$, on obtient

$$G \simeq \mathfrak{g}/\ker(\exp) \simeq \mathbb{R}^n/(\{0\}^k \times \mathbb{Z}^l) \simeq \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^l.$$

□

Théorème

Si G est un groupe de Lie abélien compact, il existe un groupe abélien fini Γ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $G \simeq \mathbb{T}^k \times \Gamma$.

Démonstration :

- La suite exacte $0 \to G_0 \to G \to G/G_0 \to 0$ se scinde donc $G \simeq G_0 \times G/G_0$.
- G_0 est abélien compact connexe donc $G_0 \simeq \mathbb{T}^k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

Le cas G abélien

Théorème

Si G est un groupe de Lie abélien connexe, il existe $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $G \simeq \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^l$.

Démonstration :

- G abélien $\implies$ exp est un morphisme de groupes.
- $\langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle = G \implies$ exp est surjectif.
- exp est un difféomorphisme local $\implies \ker(\exp) \subset \mathfrak{g}$ est discret.

En identifiant $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^n$ et $\ker(\exp) \simeq \{0\}^k \times \mathbb{Z}^l$, on obtient

$$G \simeq \mathfrak{g}/\ker(\exp) \simeq \mathbb{R}^n/(\{0\}^k \times \mathbb{Z}^l) \simeq \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^l.$$

□

Théorème

Si G est un groupe de Lie abélien compact, il existe un groupe abélien fini Γ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $G \simeq \mathbb{T}^k \times \Gamma$.

Démonstration :

- La suite exacte $0 \to G_0 \to G \to G/G_0 \to 0$ se scinde donc $G \simeq G_0 \times G/G_0$.
- G_0 est abélien compact connexe donc $G_0 \simeq \mathbb{T}^k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.
- G_0 est ouvert dans G donc G/G_0 est compact discret donc fini. □

Sous-groupe fermé

Sous-groupe fermé

Théorème

Un sous-groupe (abstrait) $H \subset G$ est une sous-variété plongée si et seulement si H est fermé dans G.

Sous-groupe fermé

Théorème

Un sous-groupe (abstrait) $H \subset G$ est une sous-variété plongée si et seulement si H est fermé dans G.

On montre au passage que $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall t \in \mathbb{R}, \exp_G(tX) \in H\}$.

Sous-groupe fermé

Théorème

Un sous-groupe (abstrait) $H \subset G$ est une sous-variété plongée si et seulement si H est fermé dans G.

On montre au passage que $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall t \in \mathbb{R}, \exp_G(tX) \in H\}$.
On en tire deux corollaires :

Sous-groupe fermé

Théorème

Un sous-groupe (abstrait) $H \subset G$ est une sous-variété plongée si et seulement si H est fermé dans G.

On montre au passage que $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall t \in \mathbb{R}, \exp_G(tX) \in H\}$.
On en tire deux corollaires :

Corollaire

Si $f : G \to H$ est un morphisme continu, il est lisse.

Sous-groupe fermé

Théorème

Un sous-groupe (abstrait) $H \subset G$ est une sous-variété plongée si et seulement si H est fermé dans G.

On montre au passage que $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall t \in \mathbb{R}, \exp_G(tX) \in H\}$.
On en tire deux corollaires :

Corollaire

Si $f : G \to H$ est un morphisme continu, il est lisse.

Démonstration :

Sous-groupe fermé

Théorème

Un sous-groupe (abstrait) $H \subset G$ est une sous-variété plongée si et seulement si H est fermé dans G.

On montre au passage que $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall t \in \mathbb{R}, \exp_G(tX) \in H\}$.
On en tire deux corollaires :

Corollaire

Si $f : G \to H$ est un morphisme continu, il est lisse.

Démonstration :

- $\mathrm{Gr}(f) = \{(g,h) \in G \times H \mid f(g) = h\}$ est un sous-groupe fermé de $G \times H$.

Sous-groupe fermé

Théorème

Un sous-groupe (abstrait) $H \subset G$ est une sous-variété plongée si et seulement si H est fermé dans G.

On montre au passage que $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall t \in \mathbb{R}, \exp_G(tX) \in H\}$.
On en tire deux corollaires :

Corollaire

Si $f : G \to H$ est un morphisme continu, il est lisse.

Démonstration :

- $\mathrm{Gr}(f) = \{(g, h) \in G \times H \mid f(g) = h\}$ est un sous-groupe fermé de $G \times H$.
- $\mathrm{Gr}(f)$ est isomorphe à G via $\pi_G : (g, f(g)) \to g$.

Sous-groupe fermé

Théorème

Un sous-groupe (abstrait) $H \subset G$ est une sous-variété plongée si et seulement si H est fermé dans G.

On montre au passage que $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall t \in \mathbb{R}, \exp_G(tX) \in H\}$.
On en tire deux corollaires :

Corollaire

Si $f : G \to H$ est un morphisme continu, il est lisse.

Démonstration :

- $\mathrm{Gr}(f) = \{(g, h) \in G \times H \mid f(g) = h\}$ est un sous-groupe fermé de $G \times H$.
- $\mathrm{Gr}(f)$ est isomorphe à G via $\pi_G : (g, f(g)) \to g$.
- On a $f = \pi_H \circ \pi_G^{-1}$.

Sous-groupe fermé

Théorème

Un sous-groupe (abstrait) $H \subset G$ est une sous-variété plongée si et seulement si H est fermé dans G.

On montre au passage que $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall t \in \mathbb{R}, \exp_G(tX) \in H\}$.
On en tire deux corollaires :

Corollaire

Si $f : G \to H$ est un morphisme continu, il est lisse.

Démonstration :

- $\mathrm{Gr}(f) = \{(g, h) \in G \times H \mid f(g) = h\}$ est un sous-groupe fermé de $G \times H$.
- $\mathrm{Gr}(f)$ est isomorphe à G via $\pi_G : (g, f(g)) \to g$.
- On a $f = \pi_H \circ \pi_G^{-1}$.

Corollaire

Un groupe topologique admet au plus une structure de groupe de Lie.

Sous-groupe analytique

Les sous-groupes fermés sont insuffisants : enroulement d'une droite sur le tore.

Sous-groupe analytique

Les sous-groupes fermés sont insuffisants : enroulement d'une droite sur le tore.

Définition

Un sous-groupe (abstrait) $H \subset G$ est un sous-groupe analytique de G si H est un groupe de Lie connexe et $\iota : H \to G$ est une immersion.

Sous-groupe analytique

Les sous-groupes fermés sont insuffisants : enroulement d'une droite sur le tore.

Définition

Un sous-groupe (abstrait) $H \subset G$ est un sous-groupe analytique de G si H est un groupe de Lie connexe et $\iota : H \to G$ est une immersion.

Par exemple : tout sous-groupe à un paramètre.

Sous-groupe analytique

Les sous-groupes fermés sont insuffisants : enroulement d'une droite sur le tore.

Définition

Un sous-groupe (abstrait) $H \subset G$ est un sous-groupe analytique de G si H est un groupe de Lie connexe et $\iota : H \to G$ est une immersion.

Par exemple : tout sous-groupe à un paramètre.
Intérêt :

Sous-groupe analytique

Les sous-groupes fermés sont insuffisants : enroulement d'une droite sur le tore.

Définition

Un sous-groupe (abstrait) $H \subset G$ est un sous-groupe analytique de G si H est un groupe de Lie connexe et $\iota : H \to G$ est une immersion.

Par exemple : tout sous-groupe à un paramètre.
Intérêt : correspondance sous-groupes analytiques $\leftrightarrow$ sous-algèbre de Lie.

Sous-groupe analytique

Les sous-groupes fermés sont insuffisants : enroulement d'une droite sur le tore.

Définition

Un sous-groupe (abstrait) $H \subset G$ est un sous-groupe analytique de G si H est un groupe de Lie connexe et $\iota : H \to G$ est une immersion.

Par exemple : tout sous-groupe à un paramètre.
Intérêt : correspondance sous-groupes analytiques $\leftrightarrow$ sous-algèbre de Lie.

Théorème

L'application $H \mapsto T_e\iota(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}$ est une bijection entre les sous-groupes analytiques de G et les sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$.

Sous-groupe analytique

Les sous-groupes fermés sont insuffisants : enroulement d'une droite sur le tore.

Définition

Un sous-groupe (abstrait) $H \subset G$ est un sous-groupe analytique de G si H est un groupe de Lie connexe et $\iota : H \to G$ est une immersion.

Par exemple : tout sous-groupe à un paramètre.
Intérêt : correspondance sous-groupes analytiques $\leftrightarrow$ sous-algèbre de Lie.

Théorème

L'application $H \mapsto T_e\iota(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}$ est une bijection entre les sous-groupes analytiques de G et les sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$.

Démonstration :

Sous-groupe analytique

Les sous-groupes fermés sont insuffisants : enroulement d'une droite sur le tore.

Définition

Un sous-groupe (abstrait) $H \subset G$ est un sous-groupe analytique de G si H est un groupe de Lie connexe et $\iota : H \to G$ est une immersion.

Par exemple : tout sous-groupe à un paramètre.
Intérêt : correspondance sous-groupes analytiques $\leftrightarrow$ sous-algèbre de Lie.

Théorème

L'application $H \mapsto T_e\iota(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}$ est une bijection entre les sous-groupes analytiques de G et les sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$.

Démonstration : Si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie, $H = \langle \exp_G(\mathfrak{h}) \rangle$. $\square$

Mesure invariante

On fixe G un groupe de Lie **compact**.

Mesure invariante

On fixe G un groupe de Lie **compact**.

Théorème

Il existe une unique mesure borélienne μ sur G vérifie les conditions suivantes :

Mesure invariante

On fixe G un groupe de Lie **compact**.

Théorème

Il existe une unique mesure borélienne μ sur G vérifie les conditions suivantes :

- $\mu(G) = 1$,

Mesure invariante

On fixe G un groupe de Lie **compact**.

Théorème

Il existe une unique mesure borélienne μ sur G vérifie les conditions suivantes :

- $\mu(G) = 1$,
- $\forall f \in C(G), \forall h \in G, \quad \displaystyle\int_G f(hg)\mathrm{d}\mu(g) = \int_G f(g)\mathrm{d}\mu(g).$

Mesure invariante

On fixe G un groupe de Lie **compact**.

Théorème

Il existe une unique mesure borélienne μ sur G vérifie les conditions suivantes :

- $\mu(G) = 1$,
- $\forall f \in C(G), \forall h \in G, \quad \int_G f(hg)\mathrm{d}\mu(g) = \int_G f(g)\mathrm{d}\mu(g).$

On a de plus

Mesure invariante

On fixe G un groupe de Lie **compact**.

Théorème

Il existe une unique mesure borélienne μ sur G vérifie les conditions suivantes :

- $\mu(G) = 1$,
- $\forall f \in C(G), \forall h \in G, \quad \int_G f(hg) \mathrm{d}\mu(g) = \int_G f(g) \mathrm{d}\mu(g).$

On a de plus

- $\forall f \in C(G), \forall h \in G, \quad \int_G f(gh) \mathrm{d}\mu(g) = \int_G f(g) \mathrm{d}\mu(g),$

Mesure invariante

On fixe G un groupe de Lie **compact**.

Théorème

Il existe une unique mesure borélienne μ sur G vérifie les conditions suivantes :

- $\mu(G) = 1$,
- $\forall f \in C(G), \forall h \in G, \quad \int_G f(hg)\mathrm{d}\mu(g) = \int_G f(g)\mathrm{d}\mu(g).$

On a de plus

- $\forall f \in C(G), \forall h \in G, \quad \int_G f(gh)\mathrm{d}\mu(g) = \int_G f(g)\mathrm{d}\mu(g),$
- $\forall f \in C(G), \quad \int_G f(g^{-1})\mathrm{d}\mu(g) = \int_G f(g)\mathrm{d}\mu(g),$

Mesure invariante

On fixe G un groupe de Lie **compact**.

Théorème

Il existe une unique mesure borélienne μ sur G vérifie les conditions suivantes :

- $\mu(G) = 1$,
- $\forall f \in C(G), \forall h \in G, \quad \int_G f(hg)\mathrm{d}\mu(g) = \int_G f(g)\mathrm{d}\mu(g)$.

On a de plus

- $\forall f \in C(G), \forall h \in G, \quad \int_G f(gh)\mathrm{d}\mu(g) = \int_G f(g)\mathrm{d}\mu(g)$,
- $\forall f \in C(G), \quad \int_G f(g^{-1})\mathrm{d}\mu(g) = \int_G f(g)\mathrm{d}\mu(g)$,
- $\forall f \in C(G), \forall \varphi \in \mathrm{Aut}(G), \quad \int_G f \circ \varphi(g)\mathrm{d}\mu(g) = \int_G f(g)\mathrm{d}\mu(g)$.

Mesure invariante

On fixe G un groupe de Lie **compact**.

Théorème

Il existe une unique mesure borélienne μ sur G vérifie les conditions suivantes :

- $\mu(G) = 1$,
- $\forall f \in C(G), \forall h \in G, \quad \int_G f(hg)\mathrm{d}\mu(g) = \int_G f(g)\mathrm{d}\mu(g).$

On a de plus

- $\forall f \in C(G), \forall h \in G, \quad \int_G f(gh)\mathrm{d}\mu(g) = \int_G f(g)\mathrm{d}\mu(g),$
- $\forall f \in C(G), \quad \int_G f(g^{-1})\mathrm{d}\mu(g) = \int_G f(g)\mathrm{d}\mu(g),$
- $\forall f \in C(G), \forall \varphi \in \mathrm{Aut}(G), \quad \int_G f \circ \varphi(g)\mathrm{d}\mu(g) = \int_G f(g)\mathrm{d}\mu(g).$

$\rightarrow$ Moyenner pour obtenir de l'invariance.

Mesure invariante

On fixe G un groupe de Lie **compact**.

Théorème

Il existe une unique mesure borélienne μ sur G vérifie les conditions suivantes :

- $\mu(G) = 1$,
- $\forall f \in C(G), \forall h \in G, \quad \int_G f(hg)\mathrm{d}\mu(g) = \int_G f(g)\mathrm{d}\mu(g).$

On a de plus

- $\forall f \in C(G), \forall h \in G, \quad \int_G f(gh)\mathrm{d}\mu(g) = \int_G f(g)\mathrm{d}\mu(g),$
- $\forall f \in C(G), \quad \int_G f(g^{-1})\mathrm{d}\mu(g) = \int_G f(g)\mathrm{d}\mu(g),$
- $\forall f \in C(G), \forall \varphi \in \mathrm{Aut}(G), \quad \int_G f \circ \varphi(g)\mathrm{d}\mu(g) = \int_G f(g)\mathrm{d}\mu(g).$

$\rightarrow$ Moyenner pour obtenir de l'invariance. $\rightarrow$ Représentation régulière sur $L^2(G)$.

Sommaire

Notations et rappels

G : groupe compact

(V, π) : représentation unitaire de G

Notations et rappels

G : groupe compact

(V, π) : représentation unitaire de G

Pour $f \in L^1(G)$: $\pi(f) := \int_G f(x)\pi(x)\mathrm{d}x$.

Notations et rappels

G : groupe compact (V, π) : représentation unitaire de G

Pour $f \in L^1(G)$: $\pi(f) := \int_G f(x)\pi(x)\mathrm{d}x$.

Si $V = L^2(G)$: $\Big(\pi(f)g\Big)(y) = \int_G f(x)g(x^{-1}y)\mathrm{d}x := f * g(y)$.

Notations et rappels

G : groupe compact

(V, π) : représentation unitaire de G

Pour $f \in L^1(G)$: $\pi(f) := \int_G f(x)\pi(x)\mathrm{d}x$.

Si $V = L^2(G)$: $\Big(\pi(f)g\Big)(y) = \int_G f(x)g(x^{-1}y)\mathrm{d}x := f * g(y)$.

Proposition

Notations et rappels

G : groupe compact

(V, π) : représentation unitaire de G

Pour $f \in L^1(G)$: $\pi(f) := \int_G f(x)\pi(x)\mathrm{d}x$.

Si $V = L^2(G)$: $\Big(\pi(f)g\Big)(y) = \int_G f(x)g(x^{-1}y)\mathrm{d}x := f * g(y)$.

Proposition

- $\|\pi(f)\| \leqslant \|f\|_1$.

Notations et rappels

G : groupe compact

(V, π) : représentation unitaire de G

Pour $f \in L^1(G)$: $\pi(f) := \int_G f(x)\pi(x)\mathrm{d}x$.

Si $V = L^2(G)$: $\Big(\pi(f)g\Big)(y) = \int_G f(x)g(x^{-1}y)\mathrm{d}x := f * g(y)$.

Proposition

- $\|\pi(f)\| \leqslant \|f\|_1$.
- $\pi(f)^* = \pi(f^*)$ *où* $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$.

Notations et rappels

G : groupe compact

(V, π) : représentation unitaire de G

Pour $f \in L^1(G)$: $\pi(f) := \int_G f(x)\pi(x)\mathrm{d}x$.

Si $V = L^2(G)$: $\Big(\pi(f)g\Big)(y) = \int_G f(x)g(x^{-1}y)\mathrm{d}x := f * g(y)$.

Proposition

- $\|\pi(f)\| \leqslant \|f\|_1$.
- $\pi(f)^* = \pi(f^*)$ *où* $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$.
- $\pi(f)\pi(g) = \pi(f * g)$.

Complète réductibilité

Complète réductibilité

Théorème

Toute représentation de dimension finie (V, π) *de* G *admet un produit scalaire* G*-invariant :*

$$\forall g \in G, \forall x, y \in V, \quad (gx, gy) = (x, y).$$

Complète réductibilité

Théorème

Toute représentation de dimension finie (V, π) de G admet un produit scalaire G-invariant :

$$\forall g \in G, \forall x, y \in V, \quad (gx, gy) = (x, y).$$

Démonstration :

Complète réductibilité

Théorème

Toute représentation de dimension finie (V, π) *de* G *admet un produit scalaire* G*-invariant :*

$$\forall g \in G, \forall x, y \in V, \quad (gx, gy) = (x, y).$$

Démonstration : On moyenne un produit scalaire $B : V \times V \to \mathbb{C}$:

$$(x, y) = \int_G B(gx, gy)\mathrm{d}g.$$

$\square$

Complète réductibilité

Théorème

Toute représentation de dimension finie (V, π) de G admet un produit scalaire G-invariant :

$$\forall g \in G, \forall x, y \in V, \quad (gx, gy) = (x, y).$$

<u>Démonstration</u> : On moyenne un produit scalaire $B : V \times V \to \mathbb{C}$:

$$(x, y) = \int_G B(gx, gy) \mathrm{d}g.$$

$\square$

Toute représentation de dimension finie est équivalente à une représentation unitaire.

Complète réductibilité

Théorème

Toute représentation de dimension finie (V, π) de G admet un produit scalaire G-invariant :

$$\forall g \in G, \forall x, y \in V, \quad (gx, gy) = (x, y).$$

Démonstration : On moyenne un produit scalaire $B : V \times V \to \mathbb{C}$:

$$(x, y) = \int_G B(gx, gy)\mathrm{d}g.$$

$\square$

Toute représentation de dimension finie est équivalente à une représentation unitaire.

Corollaire

Toute représentation de dimension finie de G est complètement réductible.

Caractères

(V, π) : représentation de dimension finie de G.

Caractères

(V, π) : représentation de dimension finie de G.

On définit le caractère de V par $\chi_V : \begin{array}{ccc} G & \to & \mathbb{C} \\ g & \mapsto & \mathrm{Tr}(\pi(g)) \end{array}$.

Caractères

(V, π) : représentation de dimension finie de G.

On définit le caractère de V par $\chi_V : \begin{array}{ccc} G & \to & \mathbb{C} \\ g & \mapsto & \mathrm{Tr}(\pi(g)) \end{array}$.

Proposition

Caractères

(V, π) : représentation de dimension finie de G.

On définit le caractère de V par $\chi_V : \begin{array}{ccc} G & \to & \mathbb{C} \\ g & \mapsto & \mathrm{Tr}(\pi(g)) \end{array}$.

Proposition

- $\chi_V \in C^\infty(G, \mathbb{C}) \subset L^2(G)$.

Caractères

(V, π) : représentation de dimension finie de G.

On définit le caractère de V par $\chi_V : \begin{array}{ccc} G & \to & \mathbb{C} \\ g & \mapsto & \mathrm{Tr}(\pi(g)) \end{array}$.

Proposition

- $\chi_V \in C^\infty(G, \mathbb{C}) \subset L^2(G)$.
- *Si* $V \simeq W$, $\chi_V = \chi_W$.

Caractères

(V, π) : représentation de dimension finie de G.

On définit le caractère de V par $\chi_V : \begin{array}{ccc} G & \to & \mathbb{C} \\ g & \mapsto & \mathrm{Tr}(\pi(g)) \end{array}$.

Proposition

- $\chi_V \in C^\infty(G, \mathbb{C}) \subset L^2(G)$.
- *Si* $V \simeq W$, $\chi_V = \chi_W$.
- χ_V *est une fonction centrale.*

Caractères

(V, π) : représentation de dimension finie de G.

On définit le caractère de V par $\chi_V : \begin{array}{ccc} G & \to & \mathbb{C} \\ g & \mapsto & \mathrm{Tr}(\pi(g)) \end{array}$.

Proposition

- $\chi_V \in C^\infty(G, \mathbb{C}) \subset L^2(G)$.
- *Si* $V \simeq W$, $\chi_V = \chi_W$.
- χ_V *est une fonction centrale.*
- $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W, \quad \chi_{V \otimes W} = \chi_V \chi_W, \quad \chi_{V^*} = \chi_{\overline{V}} = \overline{\chi_V} = \check{\chi}_V.$

Caractères

(V, π) : représentation de dimension finie de G.

On définit le caractère de V par $\chi_V : \begin{array}{ccc} G & \to & \mathbb{C} \\ g & \mapsto & \mathrm{Tr}(\pi(g)) \end{array}$.

Proposition

- $\chi_V \in C^\infty(G, \mathbb{C}) \subset L^2(G)$.
- *Si* $V \simeq W$, $\chi_V = \chi_W$.
- χ_V *est une fonction centrale.*
- $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W, \quad \chi_{V \otimes W} = \chi_V \chi_W, \quad \chi_{V^*} = \chi_{\overline{V}} = \overline{\chi_V} = \check{\chi}_V$.
- $\chi_V(e) = \mathrm{d}_V$.

Caractères

(V, π) : représentation de dimension finie de G.

On définit le caractère de V par $\chi_V : \begin{array}{ccc} G & \to & \mathbb{C} \\ g & \mapsto & \mathrm{Tr}(\pi(g)) \end{array}$.

Proposition

- $\chi_V \in C^\infty(G, \mathbb{C}) \subset L^2(G)$.
- *Si* $V \simeq W$, $\chi_V = \chi_W$.
- χ_V *est une fonction centrale.*
- $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$, $\quad \chi_{V \otimes W} = \chi_V \chi_W$, $\quad \chi_{V^*} = \chi_{\overline{V}} = \overline{\chi_V} = \check{\chi}_V$.
- $\chi_V(e) = \mathrm{d}_V$.

Si V, W *sont irréductibles non-équivalentes :*

Caractères

(V, π) : représentation de dimension finie de G.

On définit le caractère de V par $\chi_V : \begin{array}{ccc} G & \to & \mathbb{C} \\ g & \mapsto & \mathrm{Tr}(\pi(g)) \end{array}$.

Proposition

- $\chi_V \in C^\infty(G, \mathbb{C}) \subset L^2(G)$.
- *Si* $V \simeq W$, $\chi_V = \chi_W$.
- χ_V *est une fonction centrale.*
- $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W, \quad \chi_{V \otimes W} = \chi_V \chi_W, \quad \chi_{V^*} = \chi_{\overline{V}} = \overline{\chi_V} = \check{\chi}_V$.
- $\chi_V(e) = \mathrm{d}_V$.

Si V, W *sont irréductibles non-équivalentes :*

- $\chi_V = \chi_V^*$.

Caractères

(V, π) : représentation de dimension finie de G.

On définit le caractère de V par $\chi_V : \begin{array}{ccc} G & \to & \mathbb{C} \\ g & \mapsto & \mathrm{Tr}(\pi(g)) \end{array}$.

Proposition

- $\chi_V \in C^\infty(G, \mathbb{C}) \subset L^2(G)$.
- *Si* $V \simeq W$, $\chi_V = \chi_W$.
- χ_V *est une fonction centrale.*
- $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W, \quad \chi_{V \otimes W} = \chi_V \chi_W, \quad \chi_{V^*} = \chi_{\overline{V}} = \overline{\chi_V} = \check{\chi}_V$.
- $\chi_V(e) = \mathrm{d}_V$.

Si V, W *sont irréductibles non-équivalentes :*

- $\chi_V = \chi_V^*$.
- $\chi_V * \chi_W = 0$.

Caractères

(V, π) : représentation de dimension finie de G.

On définit le caractère de V par $\chi_V : \begin{array}{ccc} G & \to & \mathbb{C} \\ g & \mapsto & \mathrm{Tr}(\pi(g)) \end{array}$.

Proposition

- $\chi_V \in C^\infty(G, \mathbb{C}) \subset L^2(G)$.
- *Si* $V \simeq W$, $\chi_V = \chi_W$.
- χ_V *est une fonction centrale.*
- $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W, \quad \chi_{V \otimes W} = \chi_V \chi_W, \quad \chi_{V^*} = \chi_{\overline{V}} = \overline{\chi_V} = \check{\chi}_V$.
- $\chi_V(e) = \mathrm{d}_V$.

Si V, W *sont irréductibles non-équivalentes :*

- $\chi_V = \chi_V^*$.
- $\chi_V * \chi_W = 0$.
- $\chi_V * \chi_V = \mathrm{d}_V \, \chi_V$.

Caractères

(V, π) : représentation de dimension finie de G.

Caractères

(V, π) : représentation de dimension finie de G.

Théorème

Caractères

(V, π) : représentation de dimension finie de G.

Théorème

- $(\chi_V, \chi_W) = \dim \mathrm{Hom}_G(V, W)$.

Caractères

(V, π) : représentation de dimension finie de G.

Théorème

- $(\chi_V, \chi_W) = \dim \mathrm{Hom}_G(V, W)$.
- *Si V et W sont irréductibles,* $(\chi_V, \chi_W) = \begin{cases} 1 \text{ si } V \simeq W, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

Caractères

(V, π) : représentation de dimension finie de G.

Théorème

- $(\chi_V, \chi_W) = \dim \mathrm{Hom}_G(V, W)$.
- *Si V et W sont irréductibles,* $(\chi_V, \chi_W) = \begin{cases} 1 \text{ si } V \simeq W, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$
- $V \simeq W \iff \chi_V = \chi_W$.

Caractères

(V, π) : représentation de dimension finie de G.

Théorème

- $(\chi_V, \chi_W) = \dim \mathrm{Hom}_G(V, W)$.
- *Si V et W sont irréductibles,* $(\chi_V, \chi_W) = \begin{cases} 1 \text{ si } V \simeq W, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$
- $V \simeq W \iff \chi_V = \chi_W$.
- *V est irréductible* $\iff (\chi_V, \chi_V) = 1$.

Caractères

(V, π) : représentation de dimension finie de G.

Théorème

- $(\chi_V, \chi_W) = \dim \mathrm{Hom}_G(V, W)$.
- *Si V et W sont irréductibles,* $(\chi_V, \chi_W) = \begin{cases} 1 \text{ si } V \simeq W, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$
- $V \simeq W \iff \chi_V = \chi_W$.
- *V est irréductible* $\iff (\chi_V, \chi_V) = 1$.

<u>Démonstration</u> :

Caractères

(V, π) : représentation de dimension finie de G.

Théorème

- $(\chi_V, \chi_W) = \dim \mathrm{Hom}_G(V, W)$.
- *Si V et W sont irréductibles,* $(\chi_V, \chi_W) = \begin{cases} 1 \text{ si } V \simeq W, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$
- $V \simeq W \iff \chi_V = \chi_W$.
- *V est irréductible* $\iff (\chi_V, \chi_V) = 1$.

Démonstration :

- L'opérateur $\displaystyle\int_G \pi_V(g)\mathrm{d}g$ est un projecteur sur V^G.

Caractères

(V, π) : représentation de dimension finie de G.

Théorème

- $(\chi_V, \chi_W) = \dim \mathrm{Hom}_G(V, W)$.
- *Si V et W sont irréductibles,* $(\chi_V, \chi_W) = \begin{cases} 1 \text{ si } V \simeq W, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$
- $V \simeq W \iff \chi_V = \chi_W$.
- *V est irréductible* $\iff (\chi_V, \chi_V) = 1$.

Démonstration :

- L'opérateur $\displaystyle\int_G \pi_V(g)\mathrm{d}g$ est un projecteur sur V^G.
- On a $\overline{\chi_V}\chi_W = \chi_{V^* \otimes W} = \chi_{\mathrm{Hom}(V,W)}$.

Caractères

(V, π) : représentation de dimension finie de G.

Théorème

- $(\chi_V, \chi_W) = \dim \mathrm{Hom}_G(V, W)$.
- *Si V et W sont irréductibles,* $(\chi_V, \chi_W) = \begin{cases} 1 \text{ si } V \simeq W, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$
- $V \simeq W \iff \chi_V = \chi_W$.
- *V est irréductible* $\iff (\chi_V, \chi_V) = 1$.

<u>Démonstration</u> :

- L'opérateur $\displaystyle\int_G \pi_V(g)\mathrm{d}g$ est un projecteur sur V^G.
- On a $\overline{\chi_V}\chi_W = \chi_{V^* \otimes W} = \chi_{\mathrm{Hom}(V,W)}$.
- En combinant :

$$(\chi_V, \chi_W) = \mathrm{Tr}\left(\int_G \pi_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g)\mathrm{d}g\right) = \dim \mathrm{Hom}(V, W)^G.$$

Fonctions représentatives

$\mathbb{K}$: $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

Fonctions représentatives

$\mathbb{K}$: $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

G agit sur $C(G, \mathbb{K})$ via $\left\{ \begin{array}{l} R(g)f(x) = f(xg), \\ L(g)f(x) = f(g^{-1}x). \end{array} \right.$

Fonctions représentatives

$\mathbb{K}$: $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

G agit sur $C(G, \mathbb{K})$ via $\begin{cases} R(g)f(x) = f(xg), \\ L(g)f(x) = f(g^{-1}x). \end{cases}$

Définition

$f \in C(G, \mathbb{K})$ est une fonction représentative si elle vérifie une des conditions équivalentes suivantes :

Fonctions représentatives

$\mathbb{K}$: $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

G agit sur $C(G, \mathbb{K})$ via $\begin{cases} R(g)f(x) = f(xg), \\ L(g)f(x) = f(g^{-1}x). \end{cases}$

Définition

$f \in C(G, \mathbb{K})$ est une fonction représentative si elle vérifie une des conditions équivalentes suivantes :

- f engendre un R-sous-module de dimension finie.

Fonctions représentatives

$\mathbb{K}$: $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

G agit sur $C(G, \mathbb{K})$ via $\begin{cases} R(g)f(x) = f(xg), \\ L(g)f(x) = f(g^{-1}x). \end{cases}$

Définition

$f \in C(G, \mathbb{K})$ est une fonction représentative si elle vérifie une des conditions équivalentes suivantes :

- f engendre un R-sous-module de dimension finie.
- f engendre un L-sous-module de dimension finie.

Fonctions représentatives

$\mathbb{K}$: $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

G agit sur $C(G,\mathbb{K})$ via $\begin{cases} R(g)f(x) = f(xg), \\ L(g)f(x) = f(g^{-1}x). \end{cases}$

Définition

$f \in C(G,\mathbb{K})$ est une fonction représentative si elle vérifie une des conditions équivalentes suivantes :

- f engendre un R-sous-module de dimension finie.
- f engendre un L-sous-module de dimension finie.
- $f = \varphi \circ \pi$ pour une représentation (V,π) de dimension finie de G et $\varphi \in V^*$.

Fonctions représentatives

$\mathbb{K}$: $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

G agit sur $C(G,\mathbb{K})$ via $\begin{cases} R(g)f(x) = f(xg), \\ L(g)f(x) = f(g^{-1}x). \end{cases}$

Définition

$f \in C(G,\mathbb{K})$ est une fonction représentative si elle vérifie une des conditions équivalentes suivantes :

- f engendre un R-sous-module de dimension finie.
- f engendre un L-sous-module de dimension finie.
- $f = \varphi \circ \pi$ pour une représentation (V,π) de dimension finie de G et $\varphi \in V^*$.

On note $\mathscr{T}(G,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions représentatives.

Fonctions représentatives

$\mathbb{K}$: $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

G agit sur $C(G,\mathbb{K})$ via $\begin{cases} R(g)f(x) = f(xg), \\ L(g)f(x) = f(g^{-1}x). \end{cases}$

Définition

$f \in C(G,\mathbb{K})$ est une fonction représentative si elle vérifie une des conditions équivalentes suivantes :

- f engendre un R-sous-module de dimension finie.
- f engendre un L-sous-module de dimension finie.
- $f = \varphi \circ \pi$ pour une représentation (V,π) de dimension finie de G et $\varphi \in V^*$.

On note $\mathscr{T}(G,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions représentatives.

Typiquement : $\Big[g \mapsto (\pi(g)e_i, e_j)\Big] \in \mathscr{T}(G,\mathbb{C})$ pour $\pi : G \to U(n)$ et (e_k) b.o.n.

Fonctions représentatives

$\mathbb{K}$: $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

G agit sur $C(G,\mathbb{K})$ via $\left\{\begin{array}{l} R(g)f(x) = f(xg), \\ L(g)f(x) = f(g^{-1}x). \end{array}\right.$

Définition

$f \in C(G,\mathbb{K})$ est une fonction représentative si elle vérifie une des conditions équivalentes suivantes :

- f engendre un R-sous-module de dimension finie.
- f engendre un L-sous-module de dimension finie.
- $f = \varphi \circ \pi$ pour une représentation (V,π) de dimension finie de G et $\varphi \in V^*$.

On note $\mathscr{T}(G,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions représentatives.

Typiquement : $\Big[g \mapsto (\pi(g)e_i, e_j)\Big] \in \mathscr{T}(G,\mathbb{C})$ pour $\pi : G \to U(n)$ et (e_k) b.o.n.

En considérant les sommes directes, produits tensoriels et duaux, on obtient :

Fonctions représentatives

$\mathbb{K}$: $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

G agit sur $C(G, \mathbb{K})$ via $\begin{cases} R(g)f(x) = f(xg), \\ L(g)f(x) = f(g^{-1}x). \end{cases}$

Définition

$f \in C(G, \mathbb{K})$ est une fonction représentative si elle vérifie une des conditions équivalentes suivantes :

- f engendre un R-sous-module de dimension finie.
- f engendre un L-sous-module de dimension finie.
- $f = \varphi \circ \pi$ pour une représentation (V, π) de dimension finie de G et $\varphi \in V^*$.

On note $\mathscr{T}(G, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions représentatives.

Typiquement : $\Big[g \mapsto (\pi(g)e_i, e_j)\Big] \in \mathscr{T}(G, \mathbb{C})$ pour $\pi : G \to U(n)$ et (e_k) b.o.n.

En considérant les sommes directes, produits tensoriels et duaux, on obtient :

Proposition

$\mathscr{T}(G, \mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre unifère stable par conjugaison complexe.

Relations d'orthogonalité

Relations d'orthogonalité

Deux représentations irréductibles distinctes induisent des fonctions représentatives orthogonales :

Relations d'orthogonalité

Deux représentations irréductibles distinctes induisent des fonctions représentatives orthogonales :

Théorème

- *Soient V, W des représentations irréductibles unitaires non isomorphes. Si $v, \alpha \in V$ et $w, \beta \in W$, on a*
$$\int_G \overline{(g\alpha, v)}(g\beta, w)\mathrm{d}g = 0.$$
- *Soit V une représentation irréductible unitaire. Si $v, w, \alpha, \beta \in V$, on a*
$$\int_G \overline{(g\alpha, v)}(g\beta, w)\mathrm{d}g = \frac{1}{\mathrm{d}_V}(\beta, \alpha)(v, w).$$

Relations d'orthogonalité

Deux représentations irréductibles distinctes induisent des fonctions représentatives orthogonales :

Théorème

- *Soient V, W des représentations irréductibles unitaires non isomorphes. Si $v, \alpha \in V$ et $w, \beta \in W$, on a*

$$\int_G \overline{(g\alpha, v)}(g\beta, w)\mathrm{d}g = 0.$$

- *Soit V une représentation irréductible unitaire. Si $v, w, \alpha, \beta \in V$, on a*

$$\int_G \overline{(g\alpha, v)}(g\beta, w)\mathrm{d}g = \frac{1}{\mathrm{d}_V}(\beta, \alpha)(v, w).$$

<u>Démonstration</u> : On applique le lemme de Schur à différents opérateurs.

□

Théorème de Peter-Weyl

Théorème de Peter-Weyl

Théorème

Théorème de Peter-Weyl

Théorème

- *$\mathscr{T}(G, \mathbb{K})$ est dense dans $C(G, \mathbb{K})$ et $L^2(G, \mathbb{K})$.*

Théorème de Peter-Weyl

Théorème

- *$\mathscr{T}(G, \mathbb{K})$ est dense dans $C(G, \mathbb{K})$ et $L^2(G, \mathbb{K})$.*
- *Les caractères irréductibles engendre un sous-espace dense dans $C_{\mathrm{class}}(G, \mathbb{K})$ et une base hilbertienne de $L^2_{\mathrm{class}}(G, \mathbb{K})$.*

Théorème de Peter-Weyl

Théorème

- *$\mathscr{T}(G, \mathbb{K})$ est dense dans $C(G, \mathbb{K})$ et $L^2(G, \mathbb{K})$.*
- *Les caractères irréductibles engendre un sous-espace dense dans $C_{\mathrm{class}}(G, \mathbb{K})$ et une base hilbertienne de $L^2_{\mathrm{class}}(G, \mathbb{K})$.*
- *Toute représentation unitaire irréductible de G est de dimension finie.*

Théorème de Peter-Weyl

Théorème

- *$\mathscr{T}(G, \mathbb{K})$ est dense dans $C(G, \mathbb{K})$ et $L^2(G, \mathbb{K})$.*
- *Les caractères irréductibles engendre un sous-espace dense dans $C_{\mathrm{class}}(G, \mathbb{K})$ et une base hilbertienne de $L^2_{\mathrm{class}}(G, \mathbb{K})$.*
- *Toute représentation unitaire irréductible de G est de dimension finie.*
- *Toute représentation unitaire de G est complètement réductible.*

Théorème de Peter-Weyl

Théorème

- *$\mathscr{T}(G,\mathbb{K})$ est dense dans $C(G,\mathbb{K})$ et $L^2(G,\mathbb{K})$.*
- *Les caractères irréductibles engendre un sous-espace dense dans $C_{\mathrm{class}}(G,\mathbb{K})$ et une base hilbertienne de $L^2_{\mathrm{class}}(G,\mathbb{K})$.*
- *Toute représentation unitaire irréductible de G est de dimension finie.*
- *Toute représentation unitaire de G est complètement réductible.*
- *Si (W,π) est une représentation unitaire et V est irréductible de dimension finie, $\mathrm{d}_V\pi(\overline{\chi_V})$ est le projecteur orthogonal sur la composante V-isotypique de W.*

Conséquence du théorème de Peter-Weyl

Conséquence du théorème de Peter-Weyl

Corollaire

Tout groupe de Lie compact est linéaire.

Conséquence du théorème de Peter-Weyl

Corollaire

Tout groupe de Lie compact est linéaire.

Démonstration :

Conséquence du théorème de Peter-Weyl

Corollaire

Tout groupe de Lie compact est linéaire.

Démonstration : On fixe $g_1 \in G \backslash \{e\}$.

Conséquence du théorème de Peter-Weyl

Corollaire

Tout groupe de Lie compact est linéaire.

Démonstration : On fixe $g_1 \in G \backslash \{e\}$.
Par densité, il existe $f \in \mathscr{T}(G, \mathbb{C})$ telle que $f(g_1) \neq f(I_n)$.

Conséquence du théorème de Peter-Weyl

Corollaire

Tout groupe de Lie compact est linéaire.

<u>Démonstration</u> : On fixe $g_1 \in G \backslash \{e\}$.
Par densité, il existe $f \in \mathscr{T}(G, \mathbb{C})$ telle que $f(g_1) \neq f(I_n)$.
Il existe alors $\pi_1 : G \to \mathrm{GL}(n_1, \mathbb{C})$ telle que $\pi(g_1) \neq I_n$ et $\ker \pi \subset G$ est un sous-groupe fermé stricte.

Conséquence du théorème de Peter-Weyl

Corollaire

Tout groupe de Lie compact est linéaire.

Démonstration : On fixe $g_1 \in G \backslash \{e\}$.
Par densité, il existe $f \in \mathscr{T}(G, \mathbb{C})$ telle que $f(g_1) \neq f(I_n)$.
Il existe alors $\pi_1 : G \to \mathrm{GL}(n_1, \mathbb{C})$ telle que $\pi(g_1) \neq I_n$ et $\ker \pi \subset G$ est un sous-groupe fermé stricte.
Si π_1 n'est pas fidèle, on réitère le raisonnement avec $\ker(\pi_1)$:

Conséquence du théorème de Peter-Weyl

Corollaire

Tout groupe de Lie compact est linéaire.

Démonstration : On fixe $g_1 \in G \backslash \{e\}$.
Par densité, il existe $f \in \mathscr{T}(G, \mathbb{C})$ telle que $f(g_1) \neq f(I_n)$.
Il existe alors $\pi_1 : G \to \mathrm{GL}(n_1, \mathbb{C})$ telle que $\pi(g_1) \neq I_n$ et $\ker \pi \subset G$ est un sous-groupe fermé stricte.
Si π_1 n'est pas fidèle, on réitère le raisonnement avec $\ker(\pi_1)$:
si $g_2 \in \ker(\pi_1) \backslash \{I_n\}$, il existe $\pi_2 : G \to \mathrm{GL}(n_2, \mathbb{C})$ telle que $\pi_2(g_2) \neq I_n$.

Conséquence du théorème de Peter-Weyl

Corollaire

Tout groupe de Lie compact est linéaire.

Démonstration : On fixe $g_1 \in G \backslash \{e\}$.
Par densité, il existe $f \in \mathscr{T}(G, \mathbb{C})$ telle que $f(g_1) \neq f(I_n)$.
Il existe alors $\pi_1 : G \to \mathrm{GL}(n_1, \mathbb{C})$ telle que $\pi(g_1) \neq I_n$ et $\ker \pi \subset G$ est un sous-groupe fermé stricte.
Si π_1 n'est pas fidèle, on réitère le raisonnement avec $\ker(\pi_1)$:
si $g_2 \in \ker(\pi_1) \backslash \{I_n\}$, il existe $\pi_2 : G \to \mathrm{GL}(n_2, \mathbb{C})$ telle que $\pi_2(g_2) \neq I_n$.

En itérant, on obtient $G \supset F_1 \supset \cdots \supset F_k \supset \dots$ avec $F_k = \displaystyle\bigcap_{j=1}^{k} \ker(\pi_j)$.

Conséquence du théorème de Peter-Weyl

Corollaire

Tout groupe de Lie compact est linéaire.

Démonstration : On fixe $g_1 \in G \backslash \{e\}$.
Par densité, il existe $f \in \mathscr{T}(G, \mathbb{C})$ telle que $f(g_1) \neq f(I_n)$.
Il existe alors $\pi_1 : G \to \mathrm{GL}(n_1, \mathbb{C})$ telle que $\pi(g_1) \neq I_n$ et $\ker \pi \subset G$ est un sous-groupe fermé stricte.
Si π_1 n'est pas fidèle, on réitère le raisonnement avec $\ker(\pi_1)$:
si $g_2 \in \ker(\pi_1) \backslash \{I_n\}$, il existe $\pi_2 : G \to \mathrm{GL}(n_2, \mathbb{C})$ telle que $\pi_2(g_2) \neq I_n$.

En itérant, on obtient $G \supset F_1 \supset \cdots \supset F_k \supset \ldots$ avec $F_k = \displaystyle\bigcap_{j=1}^{k} \ker(\pi_j)$.

F_{k+1} est un sous-groupe fermé de F_k donc la suite est finie.

Conséquence du théorème de Peter-Weyl

Corollaire

Tout groupe de Lie compact est linéaire.

Démonstration : On fixe $g_1 \in G \backslash \{e\}$.
Par densité, il existe $f \in \mathscr{T}(G, \mathbb{C})$ telle que $f(g_1) \neq f(I_n)$.
Il existe alors $\pi_1 : G \to \mathrm{GL}(n_1, \mathbb{C})$ telle que $\pi(g_1) \neq I_n$ et $\ker \pi \subset G$ est un sous-groupe fermé stricte.
Si π_1 n'est pas fidèle, on réitère le raisonnement avec $\ker(\pi_1)$:
si $g_2 \in \ker(\pi_1) \backslash \{I_n\}$, il existe $\pi_2 : G \to \mathrm{GL}(n_2, \mathbb{C})$ telle que $\pi_2(g_2) \neq I_n$.

En itérant, on obtient $G \supset F_1 \supset \cdots \supset F_k \supset \ldots$ avec $F_k = \displaystyle\bigcap_{j=1}^{k} \ker(\pi_j)$.

F_{k+1} est un sous-groupe fermé de F_k donc la suite est finie.

La représentation $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{m} \pi_i$ est alors fidèle et comme G est compact, c'est un isomorphisme de groupes de Lie.