Représentations des groupes de Lie compacts

Valentin Massicot

Université de Reims Champagne-Ardenne

23 août 2025

Sommaire

1. Classification des représentations irréductibles

2. Dualité de Tannaka-Krein

Sommaire

Approche pour les représentations des groupes compacts

G : compact connexe

$\mathfrak{g}$: algèbre de Lie de G.

Approche pour les représentations des groupes compacts

G : compact connexe $\qquad\qquad$ $\mathfrak{g}$: algèbre de Lie de G.

$\mathfrak{g}$ est unitarisable pour G donc $\mathfrak{g}$ réductive : $\mathfrak{g} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$ (avec $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$).

Approche pour les représentations des groupes compacts

G : compact connexe $\qquad$ $\mathfrak{g}$: algèbre de Lie de G.

$\mathfrak{g}$ est unitarisable pour G donc $\mathfrak{g}$ réductive : $\mathfrak{g} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$ (avec $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$).

Représentation irréductible de G

Approche pour les représentations des groupes compacts

G : compact connexe $\qquad$ $\mathfrak{g}$: algèbre de Lie de G.

$\mathfrak{g}$ est unitarisable pour G donc $\mathfrak{g}$ réductive : $\mathfrak{g} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$ (avec $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$).

Représentation irréductible de $G \longrightarrow$ Représentation irréductible de $\mathfrak{g}$

Approche pour les représentations des groupes compacts

G : compact connexe $\qquad\qquad$ $\mathfrak{g}$: algèbre de Lie de G.

$\mathfrak{g}$ est unitarisable pour G donc $\mathfrak{g}$ réductive : $\mathfrak{g} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$ (avec $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$).

$$
\begin{aligned}
\text{Représentation irréductible de } G &\longrightarrow \text{Représentation irréductible de } \mathfrak{g} \\
&\longrightarrow \text{Représentation irréductible de } \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}
\end{aligned}
$$

Approche pour les représentations des groupes compacts

G : compact connexe $\qquad$ $\mathfrak{g}$: algèbre de Lie de G.

$\mathfrak{g}$ est unitarisable pour G donc $\mathfrak{g}$ réductive : $\mathfrak{g} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$ (avec $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$).

$$
\begin{aligned}
\text{Représentation irréductible de } G &\longrightarrow \text{Représentation irréductible de } \mathfrak{g} \\
&\longrightarrow \text{Représentation irréductible de } \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}} \\
&\longrightarrow \text{Représentation irréductible de } \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}} \otimes \mathbb{C}
\end{aligned}
$$

Approche pour les représentations des groupes compacts

G : compact connexe $\qquad$ $\mathfrak{g}$: algèbre de Lie de G.

$\mathfrak{g}$ est unitarisable pour G donc $\mathfrak{g}$ réductive : $\mathfrak{g} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$ (avec $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$).

$$\begin{aligned}\text{Représentation irréductible de } G &\longrightarrow \text{Représentation irréductible de } \mathfrak{g}\\ &\longrightarrow \text{Représentation irréductible de } \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}\\ &\longrightarrow \text{Représentation irréductible de } \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}} \otimes \mathbb{C}\end{aligned}$$

$\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}} \otimes \mathbb{C}$ est semi-simple complexe donc on connaît ses représentations.

Approche pour les représentations des groupes compacts

G : compact connexe $\qquad\qquad$ $\mathfrak{g}$: algèbre de Lie de G.

$\mathfrak{g}$ est unitarisable pour G donc $\mathfrak{g}$ réductive : $\mathfrak{g} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$ (avec $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$).

$$
\begin{aligned}
\text{Représentation irréductible de } G &\longrightarrow \text{Représentation irréductible de } \mathfrak{g} \\
&\longrightarrow \text{Représentation irréductible de } \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}} \\
&\longrightarrow \text{Représentation irréductible de } \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}} \otimes \mathbb{C}
\end{aligned}
$$

$\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}} \otimes \mathbb{C}$ est semi-simple complexe donc on connaît ses représentations.

But :

Approche pour les représentations des groupes compacts

G : compact connexe $\qquad$ $\mathfrak{g}$: algèbre de Lie de G.

$\mathfrak{g}$ est unitarisable pour G donc $\mathfrak{g}$ réductive : $\mathfrak{g} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$ (avec $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$).

$$\begin{aligned} \text{Représentation irréductible de } G &\longrightarrow \text{Représentation irréductible de } \mathfrak{g} \\ &\longrightarrow \text{Représentation irréductible de } \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}} \\ &\longrightarrow \text{Représentation irréductible de } \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}} \otimes \mathbb{C} \end{aligned}$$

$\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}} \otimes \mathbb{C}$ est semi-simple complexe donc on connaît ses représentations.

But :

- Interpréter une sous-algèbre de Cartan au niveau de G.

Approche pour les représentations des groupes compacts

G : compact connexe $\qquad$ $\mathfrak{g}$: algèbre de Lie de G.

$\mathfrak{g}$ est unitarisable pour G donc $\mathfrak{g}$ réductive : $\mathfrak{g} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$ (avec $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$).

$$\begin{aligned}\text{Représentation irréductible de } G &\longrightarrow \text{Représentation irréductible de } \mathfrak{g}\\ &\longrightarrow \text{Représentation irréductible de } \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}\\ &\longrightarrow \text{Représentation irréductible de } \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}} \otimes \mathbb{C}\end{aligned}$$

$\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}} \otimes \mathbb{C}$ est semi-simple complexe donc on connaît ses représentations.

But :

- Interpréter une sous-algèbre de Cartan au niveau de G.
- Intégrer les représentations de $\mathfrak{g}$.

Tores maximaux et sous-algèbres de Cartan

G : compact connexe

$\mathfrak{g}$: algèbre de Lie de G

Tores maximaux et sous-algèbres de Cartan

G : compact connexe $\qquad$ $\mathfrak{g}$: algèbre de Lie de G

On peut supposer $G \subset \mathrm{U}(n)$ et $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{u}(n)$ donc $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C} \simeq \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

Tores maximaux et sous-algèbres de Cartan

G : compact connexe $\qquad$ $\mathfrak{g}$: algèbre de Lie de G

On peut supposer $G \subset \mathrm{U}(n)$ et $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{u}(n)$ donc $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C} \simeq \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

Définition

Un sous-groupe immergé $T \subset G$ est un tore maximal si T est connexe abélien et maximal pour l'inclusion.

Tores maximaux et sous-algèbres de Cartan

G : compact connexe $\qquad$ $\mathfrak{g}$: algèbre de Lie de G

On peut supposer $G \subset \mathrm{U}(n)$ et $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{u}(n)$ donc $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C} \simeq \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

Définition

Un sous-groupe immergé $T \subset G$ est un tore maximal si T est connexe abélien et maximal pour l'inclusion.

T est alors fermé donc $T \simeq \mathbb{T}^{\ell}$, $\ell \in \mathbb{N}^*$.

Tores maximaux et sous-algèbres de Cartan

G : compact connexe $\qquad$ $\mathfrak{g}$: algèbre de Lie de G

On peut supposer $G \subset \mathrm{U}(n)$ et $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{u}(n)$ donc $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C} \simeq \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

Définition

Un sous-groupe immergé $T \subset G$ est un tore maximal si T est connexe abélien et maximal pour l'inclusion.

T est alors fermé donc $T \simeq \mathbb{T}^\ell$, $\ell \in \mathbb{N}^*$.
Correspondance sous-algèbre / sous-groupes :

Tores maximaux et sous-algèbres de Cartan

G : compact connexe $\qquad\qquad$ $\mathfrak{g}$: algèbre de Lie de G

On peut supposer $G \subset \mathrm{U}(n)$ et $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{u}(n)$ donc $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C} \simeq \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

Définition

Un sous-groupe immergé $T \subset G$ est un tore maximal si T est connexe abélien et maximal pour l'inclusion.

T est alors fermé donc $T \simeq \mathbb{T}^{\ell}$, $\ell \in \mathbb{N}^*$.
Correspondance sous-algèbre / sous-groupes :

$$T \subset G \text{ est un tore maximal } \iff \mathfrak{t} \subset \mathfrak{g} \text{ est abélienne maximale.}$$

Tores maximaux et sous-algèbres de Cartan

G : compact connexe $\mathfrak{g}$: algèbre de Lie de G

On peut supposer $G \subset \mathrm{U}(n)$ et $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{u}(n)$ donc $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C} \simeq \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

Définition

Un sous-groupe immergé $T \subset G$ est un tore maximal si T est connexe abélien et maximal pour l'inclusion.

T est alors fermé donc $T \simeq \mathbb{T}^\ell$, $\ell \in \mathbb{N}^*$.
Correspondance sous-algèbre / sous-groupes :

$$T \subset G \text{ est un tore maximal } \iff \mathfrak{t} \subset \mathfrak{g} \text{ est abélienne maximale.}$$

Proposition

Si $T \subset G$ est un tore maximal, $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t} + i\mathfrak{t}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Tores maximaux et sous-algèbres de Cartan

G : compact connexe $\qquad\qquad$ $\mathfrak{g}$: algèbre de Lie de G

On peut supposer $G \subset \mathrm{U}(n)$ et $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{u}(n)$ donc $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C} \simeq \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

Définition

Un sous-groupe immergé $T \subset G$ est un tore maximal si T est connexe abélien et maximal pour l'inclusion.

T est alors fermé donc $T \simeq \mathbb{T}^{\ell}$, $\ell \in \mathbb{N}^*$.
Correspondance sous-algèbre / sous-groupes :

$$T \subset G \text{ est un tore maximal } \iff \mathfrak{t} \subset \mathfrak{g} \text{ est abélienne maximale.}$$

Proposition

Si $T \subset G$ est un tore maximal, $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t} + i\mathfrak{t}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Démonstration :

Tores maximaux et sous-algèbres de Cartan

G : compact connexe $\qquad$ $\mathfrak{g}$: algèbre de Lie de G

On peut supposer $G \subset \mathrm{U}(n)$ et $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{u}(n)$ donc $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C} \simeq \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

Définition

Un sous-groupe immergé $T \subset G$ est un tore maximal si T est connexe abélien et maximal pour l'inclusion.

T est alors fermé donc $T \simeq \mathbb{T}^\ell$, $\ell \in \mathbb{N}^*$.
Correspondance sous-algèbre / sous-groupes :

$$T \subset G \text{ est un tore maximal } \iff \mathfrak{t} \subset \mathfrak{g} \text{ est abélienne maximale.}$$

Proposition

Si $T \subset G$ est un tore maximal, $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t} + i\mathfrak{t}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

<u>Démonstration</u> : $\mathfrak{t}$ est abélienne maximale et co-ad-diagonalisable donc $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ aussi. $\square$

Exemples de tores maximaux

Exemples de tores maximaux

- Si $G = \mathrm{U}(n)$, $\mathbb{T} = \left\{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \mid \theta_i \in \mathbb{R}\right\}$.

Exemples de tores maximaux

- Si $G = \mathrm{U}(n)$, $\mathbb{T} = \left\{ \mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \mid \theta_i \in \mathbb{R} \right\}$.
- Si $G = \mathrm{SU}(n)$, $\mathbb{T} = \left\{ \mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \mid \theta_i \in \mathbb{R}, \theta_1 + \cdots + \theta_n = 0 \right\}$.

Exemples de tores maximaux

- Si $G = \mathrm{U}(n)$, $\mathbb{T} = \left\{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \mid \theta_i \in \mathbb{R}\right\}$.
- Si $G = \mathrm{SU}(n)$, $\mathbb{T} = \left\{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \mid \theta_i \in \mathbb{R}, \theta_1 + \cdots + \theta_n = 0\right\}$.
- Si $G = \mathrm{SO}(2n)$, $\mathbb{T} = \{\mathrm{diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_n}) \mid \theta_i \in \mathbb{R}\}$

Exemples de tores maximaux

- Si $G = \mathrm{U}(n)$, $\mathbb{T} = \left\{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \mid \theta_i \in \mathbb{R}\right\}$.
- Si $G = \mathrm{SU}(n)$, $\mathbb{T} = \left\{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \mid \theta_i \in \mathbb{R}, \theta_1 + \cdots + \theta_n = 0\right\}$.
- Si $G = \mathrm{SO}(2n)$, $\mathbb{T} = \{\mathrm{diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_n}) \mid \theta_i \in \mathbb{R}\}$
- Si $G = \mathrm{SO}(2n+1)$, $\mathbb{T} = \{\mathrm{diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_n}, 1) \mid \theta_i \in \mathbb{R}\}$.

Exemples de tores maximaux

- Si $G = \mathrm{U}(n)$, $\mathbb{T} = \left\{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}) \mid \theta_i \in \mathbb{R}\right\}$.
- Si $G = \mathrm{SU}(n)$, $\mathbb{T} = \left\{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}) \mid \theta_i \in \mathbb{R}, \theta_1 + \cdots + \theta_n = 0\right\}$.
- Si $G = \mathrm{SO}(2n)$, $\mathbb{T} = \{\mathrm{diag}(R_{\theta_1}, \ldots, R_{\theta_n}) \mid \theta_i \in \mathbb{R}\}$
- Si $G = \mathrm{SO}(2n+1)$, $\mathbb{T} = \{\mathrm{diag}(R_{\theta_1}, \ldots, R_{\theta_n}, 1) \mid \theta_i \in \mathbb{R}\}$.

Remarques :

Exemples de tores maximaux

- Si $G = \mathrm{U}(n)$, $\mathbb{T} = \left\{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \mid \theta_i \in \mathbb{R}\right\}$.
- Si $G = \mathrm{SU}(n)$, $\mathbb{T} = \left\{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \mid \theta_i \in \mathbb{R}, \theta_1 + \cdots + \theta_n = 0\right\}$.
- Si $G = \mathrm{SO}(2n)$, $\mathbb{T} = \{\mathrm{diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_n}) \mid \theta_i \in \mathbb{R}\}$
- Si $G = \mathrm{SO}(2n+1)$, $\mathbb{T} = \{\mathrm{diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_n}, 1) \mid \theta_i \in \mathbb{R}\}$.

Remarques :

- Tout élément de G est conjugué à un élément de $\mathbb{T}$.

Exemples de tores maximaux

- Si $G = \mathrm{U}(n)$, $\mathbb{T} = \left\{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}) \mid \theta_i \in \mathbb{R}\right\}$.
- Si $G = \mathrm{SU}(n)$, $\mathbb{T} = \left\{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}) \mid \theta_i \in \mathbb{R}, \theta_1 + \cdots + \theta_n = 0\right\}$.
- Si $G = \mathrm{SO}(2n)$, $\mathbb{T} = \{\mathrm{diag}(R_{\theta_1}, \ldots, R_{\theta_n}) \mid \theta_i \in \mathbb{R}\}$
- Si $G = \mathrm{SO}(2n+1)$, $\mathbb{T} = \{\mathrm{diag}(R_{\theta_1}, \ldots, R_{\theta_n}, 1) \mid \theta_i \in \mathbb{R}\}$.

Remarques :

- Tout élément de G est conjugué à un élément de $\mathbb{T}$.
- L'exponentielle est surjective.

Exemples de tores maximaux

- Si $G = \mathrm{U}(n)$, $\mathbb{T} = \left\{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \mid \theta_i \in \mathbb{R}\right\}$.
- Si $G = \mathrm{SU}(n)$, $\mathbb{T} = \left\{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \mid \theta_i \in \mathbb{R}, \theta_1 + \cdots + \theta_n = 0\right\}$.
- Si $G = \mathrm{SO}(2n)$, $\mathbb{T} = \{\mathrm{diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_n}) \mid \theta_i \in \mathbb{R}\}$
- Si $G = \mathrm{SO}(2n+1)$, $\mathbb{T} = \{\mathrm{diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_n}, 1) \mid \theta_i \in \mathbb{R}\}$.

Remarques :

- Tout élément de G est conjugué à un élément de $\mathbb{T}$.
- L'exponentielle est surjective.
- Il existe $x \in G$ tel que $\mathbb{T} = Z_G(x)$.

Exemples de tores maximaux

- Si $G = \mathrm{U}(n)$, $\mathbb{T} = \left\{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}) \mid \theta_i \in \mathbb{R}\right\}$.
- Si $G = \mathrm{SU}(n)$, $\mathbb{T} = \left\{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}) \mid \theta_i \in \mathbb{R}, \theta_1 + \cdots + \theta_n = 0\right\}$.
- Si $G = \mathrm{SO}(2n)$, $\mathbb{T} = \{\mathrm{diag}(R_{\theta_1}, \ldots, R_{\theta_n}) \mid \theta_i \in \mathbb{R}\}$
- Si $G = \mathrm{SO}(2n+1)$, $\mathbb{T} = \{\mathrm{diag}(R_{\theta_1}, \ldots, R_{\theta_n}, 1) \mid \theta_i \in \mathbb{R}\}$.

Remarques :

- Tout élément de G est conjugué à un élément de $\mathbb{T}$.
- L'exponentielle est surjective.
- Il existe $x \in G$ tel que $\mathbb{T} = Z_G(x)$.
- Tous les tores maximaux sont conjugués dans G.

Exemples de tores maximaux

- Si $G = \mathrm{U}(n)$, $\mathbb{T} = \left\{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \mid \theta_i \in \mathbb{R}\right\}$.
- Si $G = \mathrm{SU}(n)$, $\mathbb{T} = \left\{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \mid \theta_i \in \mathbb{R}, \theta_1 + \cdots + \theta_n = 0\right\}$.
- Si $G = \mathrm{SO}(2n)$, $\mathbb{T} = \{\mathrm{diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_n}) \mid \theta_i \in \mathbb{R}\}$
- Si $G = \mathrm{SO}(2n+1)$, $\mathbb{T} = \{\mathrm{diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_n}, 1) \mid \theta_i \in \mathbb{R}\}$.

Remarques :

- Tout élément de G est conjugué à un élément de $\mathbb{T}$.
- L'exponentielle est surjective.
- Il existe $x \in G$ tel que $\mathbb{T} = Z_G(x)$.
- Tous les tores maximaux sont conjugués dans G.
- $\mathbb{T}$ est auto-centralisant.

De semi-simple à réductif

$\mathfrak{g}$: réductive complexe $\qquad$ $\mathfrak{h}_0$: CSA de $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$ $\qquad$ Φ : système de racines de $\mathfrak{h}_0$

Δ : base de Φ $\qquad$ R_0 : réseau des racines $\qquad$ P_0 : réseau des poids intégraux

De semi-simple à réductif

$\mathfrak{g}$: réductive complexe $\qquad$ $\mathfrak{h}_0$: CSA de $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$ $\qquad$ Φ : système de racines de $\mathfrak{h}_0$
Δ : base de Φ $\qquad$ R_0 : réseau des racines $\qquad$ P_0 : réseau des poids intégraux

Représentations irréductibles de $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$:

$$V(\lambda) = U(\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}})/I_\lambda \text{ où } I_\lambda = \langle x_\alpha \ \ (\alpha \succ 0),\ h - \lambda(h)1 \ \ (h \in \mathfrak{h}_0) \rangle \text{ où } \lambda \in P_0^+.$$

De semi-simple à réductif

$\mathfrak{g}$: réductive complexe $\mathfrak{h}_0$: CSA de $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$ Φ : système de racines de $\mathfrak{h}_0$
Δ : base de Φ R_0 : réseau des racines P_0 : réseau des poids intégraux

Représentations irréductibles de $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$:

$$V(\lambda) = U(\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}})/I_\lambda \text{ où } I_\lambda = \langle x_\alpha \ \ (\alpha \succ 0),\ h - \lambda(h)1 \ \ (h \in \mathfrak{h}_0)\rangle \text{ où } \lambda \in P_0^+.$$

On pose

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{g}, \quad P = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \forall \alpha \in \Phi, \lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}\}, \quad R = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}}(\Phi) \subset \mathfrak{h}^*$$

en identifiant $\Phi \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})^\circ \subset \mathfrak{h}^*$.

De semi-simple à réductif

$\mathfrak{g}$: réductive complexe $\mathfrak{h}_0$: CSA de $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$ Φ : système de racines de $\mathfrak{h}_0$
Δ : base de Φ R_0 : réseau des racines P_0 : réseau des poids intégraux

Représentations irréductibles de $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$:

$$V(\lambda) = U(\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}})/I_\lambda \text{ où } I_\lambda = \langle x_\alpha \ \ (\alpha \succ 0),\ h - \lambda(h)1 \ \ (h \in \mathfrak{h}_0)\rangle \text{ où } \lambda \in P_0^+.$$

On pose

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{g}, \quad P = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \forall \alpha \in \Phi, \lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}\}, \quad R = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}}(\Phi) \subset \mathfrak{h}^*$$

en identifiant $\Phi \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})^\circ \subset \mathfrak{h}^*$.

Théorème

Si π est une représentation irréductible de dimension finie de $\mathfrak{g}$, il existe un unique $\lambda \in P^+$, tel que $\pi_{|\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}} = \pi_{V(\lambda_{|\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}})}$ et $\pi_{|\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})} = \lambda_{|\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})}\mathrm{id}$. On la note aussi $V(\lambda)$.

De semi-simple à réductif

$\mathfrak{g}$: réductive complexe $\mathfrak{h}_0$: CSA de $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$ Φ : système de racines de $\mathfrak{h}_0$
Δ : base de Φ R_0 : réseau des racines P_0 : réseau des poids intégraux

Représentations irréductibles de $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$:

$$V(\lambda) = U(\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}})/I_\lambda \text{ où } I_\lambda = \langle x_\alpha \ \ (\alpha \succ 0),\ h - \lambda(h)1 \ \ (h \in \mathfrak{h}_0)\rangle \text{ où } \lambda \in P_0^+.$$

On pose

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{g}, \quad P = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \forall \alpha \in \Phi, \lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}\}, \quad R = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}}(\Phi) \subset \mathfrak{h}^*$$

en identifiant $\Phi \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})^\circ \subset \mathfrak{h}^*$.

Théorème

Si π est une représentation irréductible de dimension finie de $\mathfrak{g}$, il existe un unique $\lambda \in P^+$, tel que $\pi_{|\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}} = \pi_{V(\lambda_{|\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}})}$ et $\pi_{|\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})} = \lambda_{|\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})}\mathrm{id}$. On la note aussi $V(\lambda)$.

Remarque : $\mathfrak{g}$ peut avoir beaucoup de représentations mais pas G.

Poids analytiquement intégraux

$\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{t}_0$: algèbre de Lie de G et T, $\mathfrak{t} := \mathfrak{t}_0 \otimes \mathbb{C}$, $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$, $\mathfrak{t}' = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$

Poids analytiquement intégraux

$\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{t}_0$: algèbre de Lie de G et T, $\quad \mathfrak{t} := \mathfrak{t}_0 \otimes \mathbb{C}$, $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$, $\mathfrak{t}' = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$

En tant que $\mathfrak{t}$-module :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{t}' \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}^{\alpha}$$

Poids analytiquement intégraux

$\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{t}_0$: algèbre de Lie de G et T, $\qquad \mathfrak{t} := \mathfrak{t}_0 \otimes \mathbb{C}$, $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$, $\mathfrak{t}' = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$

En tant que $\mathfrak{t}$-module :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{t}' \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}^{\alpha} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}^{\alpha}$$

Poids analytiquement intégraux

$\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{t}_0$: algèbre de Lie de G et T, $\mathfrak{t} := \mathfrak{t}_0 \otimes \mathbb{C}$, $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$, $\mathfrak{t}' = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$

En tant que $\mathfrak{t}$-module :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{t}' \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}^{\alpha} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}^{\alpha} = 0^{\oplus \mathrm{rg}(\mathfrak{g})} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \alpha$$

Poids analytiquement intégraux

$\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{t}_0$: algèbre de Lie de G et T, $\qquad \mathfrak{t} := \mathfrak{t}_0 \otimes \mathbb{C}$, $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$, $\mathfrak{t}' = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$

En tant que $\mathfrak{t}$-module :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{t}' \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}^{\alpha} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}^{\alpha} = 0^{\oplus \mathrm{rg}(\mathfrak{g})} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \alpha$$

donc en tant que T-module :

$$\mathfrak{g} = 1^{\oplus \mathrm{rg}(\mathfrak{g})} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \xi_\alpha \text{ où } \xi_\alpha \in \widehat{T} \text{ vérifie } \mathrm{d}\xi_\alpha = \alpha_{|\mathfrak{t}_0}.$$

Poids analytiquement intégraux

$\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{t}_0$: algèbre de Lie de G et T, $\mathfrak{t} := \mathfrak{t}_0 \otimes \mathbb{C}$, $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$, $\mathfrak{t}' = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$

En tant que $\mathfrak{t}$-module :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{t}' \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}^{\alpha} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}^{\alpha} = 0^{\oplus \mathrm{rg}(\mathfrak{g})} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \alpha$$

donc en tant que T-module :

$$\mathfrak{g} = 1^{\oplus \mathrm{rg}(\mathfrak{g})} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \xi_\alpha \text{ où } \xi_\alpha \in \widehat{T} \text{ vérifie } \mathrm{d}\xi_\alpha = \alpha_{|\mathfrak{t}_0}.$$

On reconstruit Ad à partir de ad car les poids remontent à T.

Poids analytiquement intégraux

$\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{t}_0$: algèbre de Lie de G et T, $\mathfrak{t} := \mathfrak{t}_0 \otimes \mathbb{C}$, $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$, $\mathfrak{t}' = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$

En tant que $\mathfrak{t}$-module :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{t}' \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}^{\alpha} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}^{\alpha} = 0^{\oplus \mathrm{rg}(\mathfrak{g})} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \alpha$$

donc en tant que T-module :

$$\mathfrak{g} = 1^{\oplus \mathrm{rg}(\mathfrak{g})} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \xi_\alpha \text{ où } \xi_\alpha \in \widehat{T} \text{ vérifie } \mathrm{d}\xi_\alpha = \alpha_{|\mathfrak{t}_0}.$$

On reconstruit Ad à partir de ad car les poids remontent à T.

Cas général : identifier les poids qui remontent à T.

Définition

$\mu \in \mathfrak{t}^*$ est analytiquement intégral s'il existe $\xi_\mu \in \widehat{T}$ tel que $\mu_{|\mathfrak{t}_0} = \mathrm{d}\xi_\mu$.

Définition

$\mu \in \mathfrak{t}^*$ est analytiquement intégral s'il existe $\xi_\mu \in \widehat{T}$ tel que $\mu_{|\mathfrak{t}_0} = \mathrm{d}\xi_\mu$.

Cela équivaut à : $\forall H \in \mathfrak{t}_0, \exp(H) = 1 \implies \mu(H) \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Définition

$\mu \in \mathfrak{t}^*$ est analytiquement intégral s'il existe $\xi_\mu \in \widehat{T}$ tel que $\mu_{|\mathfrak{t}_0} = \mathrm{d}\xi_\mu$.

Cela équivaut à : $\forall H \in \mathfrak{t}_0, \exp(H) = 1 \implies \mu(H) \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Proposition

Si μ est analytiquement intégral, il est algébriquement intégral.

Définition

$\mu \in \mathfrak{t}^*$ est analytiquement intégral s'il existe $\xi_\mu \in \widehat{T}$ tel que $\mu_{|\mathfrak{t}_0} = \mathrm{d}\xi_\mu$.

Cela équivaut à : $\forall H \in \mathfrak{t}_0, \exp(H) = 1 \implies \mu(H) \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Proposition

Si μ est analytiquement intégral, il est algébriquement intégral.

On a les réseaux :

$$R = \{\text{racines}\}, \quad A = \{\text{poids an. intégraux}\}, \quad P = \{\text{poids alg. intégraux}\}$$

avec

$$R \subset A \subset P.$$

Définition

$\mu \in \mathfrak{t}^*$ est analytiquement intégral s'il existe $\xi_\mu \in \widehat{T}$ tel que $\mu_{|\mathfrak{t}_0} = \mathrm{d}\xi_\mu$.

Cela équivaut à : $\forall H \in \mathfrak{t}_0, \exp(H) = 1 \implies \mu(H) \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Proposition

Si μ est analytiquement intégral, il est algébriquement intégral.

On a les réseaux :

$$R = \{\text{racines}\}, \quad A = \{\text{poids an. intégraux}\}, \quad P = \{\text{poids alg. intégraux}\}$$

avec

$$R \subset A \subset P.$$

Intérêt : ces réseaux contiennent des informations sur G.

Définition

$\mu \in \mathfrak{t}^*$ est analytiquement intégral s'il existe $\xi_\mu \in \widehat{T}$ tel que $\mu_{|\mathfrak{t}_0} = \mathrm{d}\xi_\mu$.

Cela équivaut à : $\forall H \in \mathfrak{t}_0, \exp(H) = 1 \implies \mu(H) \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Proposition

Si μ est analytiquement intégral, il est algébriquement intégral.

On a les réseaux :

$$R = \{\text{racines}\}, \quad A = \{\text{poids an. intégraux}\}, \quad P = \{\text{poids alg. intégraux}\}$$

avec

$$R \subset A \subset P.$$

Intérêt : ces réseaux contiennent des informations sur G.

Par exemple :

Définition

$\mu \in \mathfrak{t}^*$ est analytiquement intégral s'il existe $\xi_\mu \in \widehat{T}$ tel que $\mu_{|\mathfrak{t}_0} = \mathrm{d}\xi_\mu$.

Cela équivaut à : $\forall H \in \mathfrak{t}_0, \exp(H) = 1 \implies \mu(H) \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Proposition

Si μ est analytiquement intégral, il est algébriquement intégral.

On a les réseaux :

$$R = \{\text{racines}\}, \quad A = \{\text{poids an. intégraux}\}, \quad P = \{\text{poids alg. intégraux}\}$$

avec

$$R \subset A \subset P.$$

Intérêt : ces réseaux contiennent des informations sur G.
Par exemple :

$$G \text{ est semi-simple} \iff |P/R| < +\infty,$$

Définition

$\mu \in \mathfrak{t}^*$ est analytiquement intégral s'il existe $\xi_\mu \in \widehat{T}$ tel que $\mu_{|\mathfrak{t}_0} = \mathrm{d}\xi_\mu$.

Cela équivaut à : $\forall H \in \mathfrak{t}_0, \exp(H) = 1 \implies \mu(H) \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Proposition

Si μ est analytiquement intégral, il est algébriquement intégral.

On a les réseaux :

$$R = \{\text{racines}\}, \quad A = \{\text{poids an. intégraux}\}, \quad P = \{\text{poids alg. intégraux}\}$$

avec

$$R \subset A \subset P.$$

Intérêt : ces réseaux contiennent des informations sur G.
Par exemple :

$$G \text{ est semi-simple} \iff |P/R| < +\infty,$$

$$Z(G) \simeq A/R \text{ si } G \text{ est semi-simple},$$

Définition

$\mu \in \mathfrak{t}^*$ est analytiquement intégral s'il existe $\xi_\mu \in \widehat{T}$ tel que $\mu_{|\mathfrak{t}_0} = \mathrm{d}\xi_\mu$.

Cela équivaut à : $\forall H \in \mathfrak{t}_0, \exp(H) = 1 \implies \mu(H) \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Proposition

Si μ est analytiquement intégral, il est algébriquement intégral.

On a les réseaux :

$$R = \{\text{racines}\}, \quad A = \{\text{poids an. intégraux}\}, \quad P = \{\text{poids alg. intégraux}\}$$

avec

$$R \subset A \subset P.$$

Intérêt : ces réseaux contiennent des informations sur G.
Par exemple :

$$G \text{ est semi-simple} \iff |P/R| < +\infty,$$

$$Z(G) \simeq A/R \text{ si } G \text{ est semi-simple},$$

$$\pi_1(G) \simeq P/A \text{ si } G \text{ est semi-simple}.$$

Théorème du plus haut poids

Théorème du plus haut poids

Théorème

Soit G un groupe compact connexe et T un tore maximal et Δ une base du système de racines associé à $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$. L'ensemble des représentations irréductibles de dimension finie de G est en bijection avec l'ensemble des poids analytiquement intégraux dominants. Si $\lambda \in A^{+}$, la représentation dérivée est donnée par $V(\lambda)$.

Théorème du plus haut poids

Théorème

Soit G un groupe compact connexe et T un tore maximal et Δ une base du système de racines associé à $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$. L'ensemble des représentations irréductibles de dimension finie de G est en bijection avec l'ensemble des poids analytiquement intégraux dominants. Si $\lambda \in A^+$, la représentation dérivée est donnée par $V(\lambda)$.

On aura besoin du lemme suivant :

Lemme

Les sous-groupes G_{ss} et $(Z_G)_0$ sont fermés dans G, commutent et vérifient

$$G = G_{\mathrm{ss}}(Z_G)_0.$$

Théorème du plus haut poids

Théorème

Soit G un groupe compact connexe et T un tore maximal et Δ une base du système de racines associé à $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$. L'ensemble des représentations irréductibles de dimension finie de G est en bijection avec l'ensemble des poids analytiquement intégraux dominants. Si $\lambda \in A^{+}$, la représentation dérivée est donnée par $V(\lambda)$.

On aura besoin du lemme suivant :

Lemme

Les sous-groupes G_{ss} et $(Z_G)_0$ sont fermés dans G, commutent et vérifient

$$G = G_{\mathrm{ss}}(Z_G)_0.$$

<u>Démonstration</u> :

Théorème du plus haut poids

Théorème

Soit G un groupe compact connexe et T un tore maximal et Δ une base du système de racines associé à $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$. L'ensemble des représentations irréductibles de dimension finie de G est en bijection avec l'ensemble des poids analytiquement intégraux dominants. Si $\lambda \in A^+$, la représentation dérivée est donnée par $V(\lambda)$.

On aura besoin du lemme suivant :

Lemme

Les sous-groupes G_{ss} et $(Z_G)_0$ sont fermés dans G, commutent et vérifient

$$G = G_{\mathrm{ss}}(Z_G)_0.$$

Démonstration :

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ donc $\tilde{G} = \tilde{G}_{\mathrm{ss}} \times (\tilde{Z_G})_0$ avec $(\tilde{Z_G})_0 \simeq \mathbb{R}^d$ donc $G = G_{\mathrm{ss}}(Z_G)_0$.

Théorème du plus haut poids

Théorème

Soit G un groupe compact connexe et T un tore maximal et Δ une base du système de racines associé à $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$. L'ensemble des représentations irréductibles de dimension finie de G est en bijection avec l'ensemble des poids analytiquement intégraux dominants. Si $\lambda \in A^+$, la représentation dérivée est donnée par $V(\lambda)$.

On aura besoin du lemme suivant :

Lemme

Les sous-groupes G_{ss} et $(Z_G)_0$ sont fermés dans G, commutent et vérifient

$$G = G_{\mathrm{ss}}(Z_G)_0.$$

<u>Démonstration</u> :

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ donc $\tilde{G} = \tilde{G}_{\mathrm{ss}} \times (\tilde{Z}_G)_0$ avec $(\tilde{Z}_G)_0 \simeq \mathbb{R}^d$ donc $G = G_{\mathrm{ss}}(Z_G)_0$.
- $\mathrm{Ad}(G_{\mathrm{ss}}) = \mathrm{Ad}(G)$ est compact et G_{ss} est semi-simple donc $\tilde{G}_{\mathrm{ss}}$ est compact d'où G_{ss} est fermé.

Théorème du plus haut poids

Théorème

Soit G un groupe compact connexe et T un tore maximal et Δ une base du système de racines associé à $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$. L'ensemble des représentations irréductibles de dimension finie de G est en bijection avec l'ensemble des poids analytiquement intégraux dominants. Si $\lambda \in A^+$, la représentation dérivée est donnée par $V(\lambda)$.

On aura besoin du lemme suivant :

Lemme

Les sous-groupes G_{ss} et $(Z_G)_0$ sont fermés dans G, commutent et vérifient

$$G = G_{\mathrm{ss}}(Z_G)_0.$$

Démonstration :

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ donc $\tilde{G} = \tilde{G}_{\mathrm{ss}} \times (\tilde{Z}_G)_0$ avec $(\tilde{Z}_G)_0 \simeq \mathbb{R}^d$ donc $G = G_{\mathrm{ss}}(Z_G)_0$.
- $\mathrm{Ad}(G_{\mathrm{ss}}) = \mathrm{Ad}(G)$ est compact et G_{ss} est semi-simple donc $\tilde{G}_{\mathrm{ss}}$ est compact d'où G_{ss} est fermé.
- $(Z_G)_0$ est fermé dans Z_G qui est fermé dans G donc $(Z_G)_0$ est fermé dans G.

Démonstration :

Démonstration : On considère le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{g} \arrow[ddl, "\widetilde{\exp}"'] \arrow[d, "\mathrm{d}\pi_\lambda"] \arrow[ddr, "\exp"] & \\
 & V(\lambda) & \\
\tilde{T} \subset \tilde{G} \arrow[ur, "\pi_\lambda"'] \arrow[rr, "\pi"'] & & G \supset T \arrow[ul, dashed]
\end{tikzcd}$$

Démonstration : On considère le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{g} \arrow[ddl, "\widetilde{\exp}"'] \arrow[d, "\mathrm{d}\pi_\lambda"] \arrow[ddr, "\exp"] & \\
 & V(\lambda) & \\
\tilde{T} \subset \tilde{G} \arrow[ur, "\pi_\lambda"'] \arrow[rr, "\pi"'] & & G \supset T \arrow[ul, dashed]
\end{tikzcd}$$

On a $\begin{cases} \tilde{G} = \mathbb{R}^n \times \tilde{G}_{\mathrm{ss}} \\ G = \tilde{G}/Z \end{cases}$ avec $\begin{cases} \tilde{G}_{\mathrm{ss}} \text{ compact} \\ Z \subset Z(\tilde{G}) = \mathbb{R}^n \times Z(\tilde{G}_{\mathrm{ss}}) \subset \mathbb{R}^n \times \tilde{T} \end{cases}$.

Démonstration : On considère le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{g} \arrow[dl, "\widetilde{\exp}"'] \arrow[d, "\mathrm{d}\pi_\lambda"] \arrow[dr, "\exp"] & \\
 & V(\lambda) & \\
\tilde{T} \subset \tilde{G} \arrow[ur, "\pi_\lambda"'] \arrow[rr, "\pi"'] & & G \supset T \arrow[ul, dashed]
\end{tikzcd}$$

On a $\begin{cases} \tilde{G} = \mathbb{R}^n \times \tilde{G}_{\mathrm{ss}} \\ G = \tilde{G}/Z \end{cases}$ avec $\begin{cases} \tilde{G}_{\mathrm{ss}} \text{ compact} \\ Z \subset Z(\tilde{G}) = \mathbb{R}^n \times Z(\tilde{G}_{\mathrm{ss}}) \subset \mathbb{R}^n \times \tilde{T} \end{cases}$.

Comme $\ker \pi = Z \subset \mathbb{R}^n \times \tilde{T} \subset \widetilde{\exp}(\mathfrak{t}_0)$, si $x = \widetilde{\exp}(X) \in \ker \pi \cap \widetilde{\exp}(\mathfrak{t}_0)$, on a

$$1 = \pi(x) = \pi \circ \widetilde{\exp}(X) = \exp(X)$$

donc $\lambda(X) \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

<u>Démonstration</u> : On considère le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathfrak{g} \arrow[dll, "\widetilde{\exp}"'] \arrow[d, "\mathrm{d}\pi_\lambda"] \arrow[drr, "\exp"] & & \\
 & & V(\lambda) & & \\
\tilde{T} \subset \tilde{G} \arrow[urr, "\pi_\lambda"'] \arrow[rrrr, "\pi"'] & & & & G \supset T \arrow[ull, dashed]
\end{tikzcd}$$

On a $\begin{cases} \tilde{G} = \mathbb{R}^n \times \tilde{G}_{\mathrm{ss}} \\ G = \tilde{G}/Z \end{cases}$ avec $\begin{cases} \tilde{G}_{\mathrm{ss}} \text{ compact} \\ Z \subset Z(\tilde{G}) = \mathbb{R}^n \times Z(\tilde{G}_{\mathrm{ss}}) \subset \mathbb{R}^n \times \tilde{T} \end{cases}$.

Comme $\ker \pi = Z \subset \mathbb{R}^n \times \tilde{T} \subset \widetilde{\exp}(\mathfrak{t}_0)$, si $x = \widetilde{\exp}(X) \in \ker \pi \cap \widetilde{\exp}(\mathfrak{t}_0)$, on a

$$1 = \pi(x) = \pi \circ \widetilde{\exp}(X) = \exp(X)$$

donc $\lambda(X) \in 2i\pi\mathbb{Z}$. Par Schur, $\pi_\lambda(x) \in \mathbb{C}^*\mathrm{id}$ donc

$$\pi_\lambda(x)v_\lambda = \pi_\lambda \circ \widetilde{\exp}(X)v_\lambda = \exp(\mathrm{d}\pi_\lambda(X))v_\lambda = e^{\lambda(X)}v_\lambda = v_\lambda$$

et $x \in \ker \pi_\lambda$.

<u>Démonstration</u> : On considère le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{g} \arrow[ddl, "\widetilde{\exp}"'] \arrow[d, "\mathrm{d}\pi_\lambda"] \arrow[ddr, "\exp"] & \\
 & V(\lambda) & \\
\tilde{T} \subset \tilde{G} \arrow[ur, "\pi_\lambda"'] \arrow[rr, "\pi"'] & & G \supset T \arrow[ul, dashed]
\end{tikzcd}$$

On a $\begin{cases} \tilde{G} = \mathbb{R}^n \times \tilde{G}_{\mathrm{ss}} \\ G = \tilde{G}/Z \end{cases}$ avec $\begin{cases} \tilde{G}_{\mathrm{ss}} \text{ compact} \\ Z \subset Z(\tilde{G}) = \mathbb{R}^n \times Z(\tilde{G}_{\mathrm{ss}}) \subset \mathbb{R}^n \times \tilde{T} \end{cases}$.

Comme $\ker \pi = Z \subset \mathbb{R}^n \times \tilde{T} \subset \widetilde{\exp}(\mathfrak{t}_0)$, si $x = \widetilde{\exp}(X) \in \ker \pi \cap \widetilde{\exp}(\mathfrak{t}_0)$, on a

$$1 = \pi(x) = \pi \circ \widetilde{\exp}(X) = \exp(X)$$

donc $\lambda(X) \in 2i\pi\mathbb{Z}$. Par Schur, $\pi_\lambda(x) \in \mathbb{C}^*\mathrm{id}$ donc

$$\pi_\lambda(x)v_\lambda = \pi_\lambda \circ \widetilde{\exp}(X)v_\lambda = \exp(\mathrm{d}\pi_\lambda(X))v_\lambda = e^{\lambda(X)}v_\lambda = v_\lambda$$

et $x \in \ker \pi_\lambda$.
Finalement, π_λ passe au quotient à $G = \tilde{G}/Z$. □

État de la théorie des représentations de G :

État de la théorie des représentations de G :

- analyse harmonique : Peter-Weyl,

État de la théorie des représentations de G :

- analyse harmonique : Peter-Weyl,
- classification : plus haut poids,

État de la théorie des représentations de G :

- analyse harmonique : Peter-Weyl,
- classification : plus haut poids,
- combinatoire : formule des caractères, de la dimension, de Freudenthal, etc.

État de la théorie des représentations de G :

- analyse harmonique : Peter-Weyl,
- classification : plus haut poids,
- combinatoire : formule des caractères, de la dimension, de Freudenthal, etc.

Il nous manque une construction géométrique !

État de la théorie des représentations de G :

- analyse harmonique : Peter-Weyl,
- classification : plus haut poids,
- combinatoire : formule des caractères, de la dimension, de Freudenthal, etc.

Il nous manque une construction géométrique !

Prérequis pour Borel-Weil :

État de la théorie des représentations de G :

- analyse harmonique : Peter-Weyl,
- classification : plus haut poids,
- combinatoire : formule des caractères, de la dimension, de Freudenthal, etc.

Il nous manque une construction géométrique !

Prérequis pour Borel-Weil :

- complexification d'un groupe de Lie compact,

État de la théorie des représentations de G :

- analyse harmonique : Peter-Weyl,
- classification : plus haut poids,
- combinatoire : formule des caractères, de la dimension, de Freudenthal, etc.

Il nous manque une construction géométrique !

Prérequis pour Borel-Weil :

- complexification d'un groupe de Lie compact,
- décomposition d'Iwasawa,

État de la théorie des représentations de G :

- analyse harmonique : Peter-Weyl,
- classification : plus haut poids,
- combinatoire : formule des caractères, de la dimension, de Freudenthal, etc.

Il nous manque une construction géométrique !

Prérequis pour Borel-Weil :

- complexification d'un groupe de Lie compact,
- décomposition d'Iwasawa,
- structure géométrique de G/T,

État de la théorie des représentations de G :

- analyse harmonique : Peter-Weyl,
- classification : plus haut poids,
- combinatoire : formule des caractères, de la dimension, de Freudenthal, etc.

Il nous manque une construction géométrique !

Prérequis pour Borel-Weil :

- complexification d'un groupe de Lie compact,
- décomposition d'Iwasawa,
- structure géométrique de G/T,
- représentation induite.

Sommaire

L'algèbre de Hopf $\mathscr{T}(G, \mathbb{K})$

G : groupe de Lie compact linéaire.

L'algèbre de Hopf $\mathscr{T}(G, \mathbb{K})$

G : groupe de Lie compact linéaire.

But : reconstruire G à partir de $\mathscr{T}(G, \mathbb{R})$ et construire une version complexe de G.

L'algèbre de Hopf $\mathscr{T}(G, \mathbb{K})$

G : groupe de Lie compact linéaire.
But : reconstruire G à partir de $\mathscr{T}(G, \mathbb{R})$ et construire une version complexe de G.

Les opérations de G induisent les applications suivantes :

L'algèbre de Hopf $\mathscr{T}(G, \mathbb{K})$

G : groupe de Lie compact linéaire.
But : reconstruire G à partir de $\mathscr{T}(G, \mathbb{R})$ et construire une version complexe de G.

Les opérations de G induisent les applications suivantes :

$$\Delta : \begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) & \to & \mathscr{T}(G \times G, \mathbb{K}) \simeq \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) \otimes \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \Delta(f) : (x, y) \mapsto f(xy) \end{array}$$

L'algèbre de Hopf $\mathscr{T}(G, \mathbb{K})$

G : groupe de Lie compact linéaire.

But : reconstruire G à partir de $\mathscr{T}(G, \mathbb{R})$ et construire une version complexe de G.

Les opérations de G induisent les applications suivantes :

$$\Delta : \begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) & \to & \mathscr{T}(G \times G, \mathbb{K}) \simeq \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) \otimes \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \Delta(f) : (x, y) \mapsto f(xy) \end{array}$$

$$S : \begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) & \to & \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) \\ f & \mapsto & S(f) : x \mapsto f(x^{-1}) \end{array},$$

L'algèbre de Hopf $\mathscr{T}(G,\mathbb{K})$

G : groupe de Lie compact linéaire.

But : reconstruire G à partir de $\mathscr{T}(G,\mathbb{R})$ et construire une version complexe de G.

Les opérations de G induisent les applications suivantes :

$$\Delta : \begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G,\mathbb{K}) & \to & \mathscr{T}(G\times G,\mathbb{K}) \simeq \mathscr{T}(G,\mathbb{K}) \otimes \mathscr{T}(G,\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \Delta(f) : (x,y) \mapsto f(xy) \end{array}$$

$$S : \begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G,\mathbb{K}) & \to & \mathscr{T}(G,\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & S(f) : x \mapsto f(x^{-1}) \end{array}, \quad \varepsilon : \begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G,\mathbb{K}) & \mapsto & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & f(e) \end{array}.$$

L'algèbre de Hopf $\mathscr{T}(G, \mathbb{K})$

G : groupe de Lie compact linéaire.
But : reconstruire G à partir de $\mathscr{T}(G, \mathbb{R})$ et construire une version complexe de G.

Les opérations de G induisent les applications suivantes :

$$\Delta : \begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) & \to & \mathscr{T}(G \times G, \mathbb{K}) \simeq \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) \otimes \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \Delta(f) : (x, y) \mapsto f(xy) \end{array}$$

$$S : \begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) & \to & \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) \\ f & \mapsto & S(f) : x \mapsto f(x^{-1}) \end{array}, \quad \varepsilon : \begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) & \mapsto & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & f(e) \end{array}.$$

Proposition

On a les relations

L'algèbre de Hopf $\mathscr{T}(G, \mathbb{K})$

G : groupe de Lie compact linéaire.
But : reconstruire G à partir de $\mathscr{T}(G, \mathbb{R})$ et construire une version complexe de G.

Les opérations de G induisent les applications suivantes :

$$\Delta : \begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) & \to & \mathscr{T}(G \times G, \mathbb{K}) \simeq \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) \otimes \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \Delta(f) : (x, y) \mapsto f(xy) \end{array}$$

$$S : \begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) & \to & \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) \\ f & \mapsto & S(f) : x \mapsto f(x^{-1}) \end{array}, \quad \varepsilon : \begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) & \mapsto & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & f(e) \end{array}.$$

Proposition

On a les relations

$$(\iota \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \iota) \circ \Delta,$$

L'algèbre de Hopf $\mathscr{T}(G, \mathbb{K})$

G : groupe de Lie compact linéaire.

But : reconstruire G à partir de $\mathscr{T}(G, \mathbb{R})$ et construire une version complexe de G.

Les opérations de G induisent les applications suivantes :

$$\Delta : \begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) & \to & \mathscr{T}(G \times G, \mathbb{K}) \simeq \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) \otimes \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \Delta(f) : (x, y) \mapsto f(xy) \end{array}$$

$$S : \begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) & \to & \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) \\ f & \mapsto & S(f) : x \mapsto f(x^{-1}) \end{array}, \quad \varepsilon : \begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) & \mapsto & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & f(e) \end{array}.$$

Proposition

On a les relations

$$(\iota \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \iota) \circ \Delta,$$

$$(\iota \otimes \varepsilon) \circ \Delta = (\varepsilon \otimes \iota) \circ \Delta = \iota,$$

L'algèbre de Hopf $\mathscr{T}(G, \mathbb{K})$

G : groupe de Lie compact linéaire.
But : reconstruire G à partir de $\mathscr{T}(G, \mathbb{R})$ et construire une version complexe de G.

Les opérations de G induisent les applications suivantes :

$$\Delta : \begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) & \to & \mathscr{T}(G \times G, \mathbb{K}) \simeq \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) \otimes \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \Delta(f) : (x, y) \mapsto f(xy) \end{array}$$

$$S : \begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) & \to & \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) \\ f & \mapsto & S(f) : x \mapsto f(x^{-1}) \end{array}, \quad \varepsilon : \begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) & \mapsto & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & f(e) \end{array}.$$

Proposition

On a les relations

$$(\iota \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \iota) \circ \Delta,$$

$$(\iota \otimes \varepsilon) \circ \Delta = (\varepsilon \otimes \iota) \circ \Delta = \iota,$$

$$m \circ (\iota \otimes S) \circ \Delta = m \circ (S \otimes \iota) \circ \Delta = \varepsilon.$$

L'algèbre de Hopf $\mathscr{T}(G,\mathbb{K})$

G : groupe de Lie compact linéaire.

But : reconstruire G à partir de $\mathscr{T}(G,\mathbb{R})$ et construire une version complexe de G.

Les opérations de G induisent les applications suivantes :

$$\Delta : \begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G,\mathbb{K}) & \to & \mathscr{T}(G\times G,\mathbb{K}) \simeq \mathscr{T}(G,\mathbb{K})\otimes\mathscr{T}(G,\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \Delta(f) : (x,y)\mapsto f(xy) \end{array}$$

$$S : \begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G,\mathbb{K}) & \to & \mathscr{T}(G,\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & S(f) : x\mapsto f(x^{-1}) \end{array}, \quad \varepsilon : \begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G,\mathbb{K}) & \mapsto & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & f(e) \end{array}.$$

Proposition

On a les relations

$$(\iota\otimes\Delta)\circ\Delta = (\Delta\otimes\iota)\circ\Delta,$$

$$(\iota\otimes\varepsilon)\circ\Delta = (\varepsilon\otimes\iota)\circ\Delta = \iota,$$

$$m\circ(\iota\otimes S)\circ\Delta = m\circ(S\otimes\iota)\circ\Delta = \varepsilon.$$

$\mathscr{T}(G,\mathbb{K})$ est une algèbre de Hopf.

On pose $G_{\mathbb{K}} = \{\text{morphismes d'algèbres } \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}\}$

On pose $G_{\mathbb{K}} = \{\text{morphismes d'algèbres } \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}\}$ muni de

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathbb{K}} \times G_{\mathbb{K}} & \to & G_{\mathbb{K}} \\ (s,t) & \mapsto & st : f \mapsto (s \otimes t)(\Delta(f)) \end{array}.$$

On pose $G_{\mathbb{K}} = \{\text{morphismes d'algèbres } \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}\}$ muni de

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathbb{K}} \times G_{\mathbb{K}} & \to & G_{\mathbb{K}} \\ (s, t) & \mapsto & st : f \mapsto (s \otimes t)(\Delta(f)) \end{array}.$$

$G_{\mathbb{K}}$ est un groupe avec $t^{-1} = t \circ S, \;\; e_{G_{\mathbb{K}}} = \varepsilon$

On pose $G_{\mathbb{K}} = \{\text{morphismes d'algèbres } \mathscr{T}(G, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}\}$ muni de

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathbb{K}} \times G_{\mathbb{K}} & \to & G_{\mathbb{K}} \\ (s, t) & \mapsto & st : f \mapsto (s \otimes t)(\Delta(f)) \end{array}.$$

$G_{\mathbb{K}}$ est un groupe avec $t^{-1} = t \circ S, \;\; e_{G_{\mathbb{K}}} = \varepsilon$ et on a l'application canonique

$$i : \begin{array}{ccc} G & \to & G_{\mathbb{K}} \\ g & \mapsto & i(g) : f \mapsto f(g) \end{array}.$$

On pose $G_{\mathbb{K}} = \{\text{morphismes d'algèbres } \mathscr{T}(G,\mathbb{K}) \to \mathbb{K}\}$ muni de

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathbb{K}} \times G_{\mathbb{K}} & \to & G_{\mathbb{K}} \\ (s,t) & \mapsto & st : f \mapsto (s \otimes t)(\Delta(f)) \end{array}.$$

$G_{\mathbb{K}}$ est un groupe avec $t^{-1} = t \circ S$, $e_{G_{\mathbb{K}}} = \varepsilon$ et on a l'application canonique

$$i : \begin{array}{ccc} G & \to & G_{\mathbb{K}} \\ g & \mapsto & i(g) : f \mapsto f(g) \end{array}.$$

Proposition

L'application i est un morphisme injectif.

On pose $G_{\mathbb{K}} = \{\text{morphismes d'algèbres } \mathscr{T}(G,\mathbb{K}) \to \mathbb{K}\}$ muni de

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathbb{K}} \times G_{\mathbb{K}} & \to & G_{\mathbb{K}} \\ (s,t) & \mapsto & st : f \mapsto (s \otimes t)(\Delta(f)) \end{array}.$$

$G_{\mathbb{K}}$ est un groupe avec $t^{-1} = t \circ S,\ \ e_{G_{\mathbb{K}}} = \varepsilon$ et on a l'application canonique

$$i : \begin{array}{ccc} G & \to & G_{\mathbb{K}} \\ g & \mapsto & i(g) : f \mapsto f(g) \end{array}.$$

Proposition

L'application i est un morphisme injectif.

Démonstration :

On pose $G_{\mathbb{K}} = \{\text{morphismes d'algèbres } \mathscr{T}(G,\mathbb{K}) \to \mathbb{K}\}$ muni de

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathbb{K}} \times G_{\mathbb{K}} & \to & G_{\mathbb{K}} \\ (s,t) & \mapsto & st : f \mapsto (s \otimes t)(\Delta(f)) \end{array}.$$

$G_{\mathbb{K}}$ est un groupe avec $t^{-1} = t \circ S$, $e_{G_{\mathbb{K}}} = \varepsilon$ et on a l'application canonique

$$i : \begin{array}{ccc} G & \to & G_{\mathbb{K}} \\ g & \mapsto & i(g) : f \mapsto f(g) \end{array}.$$

Proposition

L'application i est un morphisme injectif.

Démonstration : D'une part, si $x, y \in G_{\mathbb{K}}$ et $f \in \mathscr{T}(G,\mathbb{K})$:

$$\Big(i(x)i(y)\Big)(f)$$

On pose $G_{\mathbb{K}} = \{\text{morphismes d'algèbres } \mathscr{T}(G,\mathbb{K}) \to \mathbb{K}\}$ muni de

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathbb{K}} \times G_{\mathbb{K}} & \to & G_{\mathbb{K}} \\ (s,t) & \mapsto & st : f \mapsto (s \otimes t)(\Delta(f)) \end{array}.$$

$G_{\mathbb{K}}$ est un groupe avec $t^{-1} = t \circ S, \quad e_{G_{\mathbb{K}}} = \varepsilon$ et on a l'application canonique

$$i : \begin{array}{ccc} G & \to & G_{\mathbb{K}} \\ g & \mapsto & i(g) : f \mapsto f(g) \end{array}.$$

Proposition

L'application i est un morphisme injectif.

<u>Démonstration</u> : D'une part, si $x, y \in G_{\mathbb{K}}$ et $f \in \mathscr{T}(G,\mathbb{K})$:

$$\Big(i(x)i(y)\Big)(f) = \sum i(x)(f_{(1)})i(y)(f_{(2)})$$

On pose $G_{\mathbb{K}} = \{\text{morphismes d'algèbres } \mathscr{T}(G,\mathbb{K}) \to \mathbb{K}\}$ muni de

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathbb{K}} \times G_{\mathbb{K}} & \to & G_{\mathbb{K}} \\ (s,t) & \mapsto & st : f \mapsto (s \otimes t)(\Delta(f)) \end{array}.$$

$G_{\mathbb{K}}$ est un groupe avec $t^{-1} = t \circ S$, $e_{G_{\mathbb{K}}} = \varepsilon$ et on a l'application canonique

$$i : \begin{array}{ccc} G & \to & G_{\mathbb{K}} \\ g & \mapsto & i(g) : f \mapsto f(g) \end{array}.$$

Proposition

L'application i est un morphisme injectif.

Démonstration : D'une part, si $x, y \in G_{\mathbb{K}}$ et $f \in \mathscr{T}(G,\mathbb{K})$:

$$\Big(i(x)i(y)\Big)(f) = \sum i(x)(f_{(1)})i(y)(f_{(2)}) = \sum f_{(1)}(x)f_{(2)}(y)$$

On pose $G_{\mathbb{K}} = \{\text{morphismes d'algèbres } \mathscr{T}(G,\mathbb{K}) \to \mathbb{K}\}$ muni de

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathbb{K}} \times G_{\mathbb{K}} & \to & G_{\mathbb{K}} \\ (s,t) & \mapsto & st : f \mapsto (s \otimes t)(\Delta(f)) \end{array}.$$

$G_{\mathbb{K}}$ est un groupe avec $t^{-1} = t \circ S$, $e_{G_{\mathbb{K}}} = \varepsilon$ et on a l'application canonique

$$i : \begin{array}{ccc} G & \to & G_{\mathbb{K}} \\ g & \mapsto & i(g) : f \mapsto f(g) \end{array}.$$

Proposition

L'application i est un morphisme injectif.

<u>Démonstration</u> : D'une part, si $x, y \in G_{\mathbb{K}}$ et $f \in \mathscr{T}(G,\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} \Big(i(x)i(y)\Big)(f) &= \sum i(x)(f_{(1)})i(y)(f_{(2)}) = \sum f_{(1)}(x)f_{(2)}(y) \\ &= \Delta(f)(x,y) \end{aligned}$$

On pose $G_{\mathbb{K}} = \{\text{morphismes d'algèbres } \mathscr{T}(G,\mathbb{K}) \to \mathbb{K}\}$ muni de

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathbb{K}} \times G_{\mathbb{K}} & \to & G_{\mathbb{K}} \\ (s,t) & \mapsto & st : f \mapsto (s \otimes t)(\Delta(f)) \end{array}.$$

$G_{\mathbb{K}}$ est un groupe avec $t^{-1} = t \circ S$, $e_{G_{\mathbb{K}}} = \varepsilon$ et on a l'application canonique

$$i : \begin{array}{ccc} G & \to & G_{\mathbb{K}} \\ g & \mapsto & i(g) : f \mapsto f(g) \end{array}.$$

Proposition

L'application i est un morphisme injectif.

Démonstration : D'une part, si $x, y \in G_{\mathbb{K}}$ et $f \in \mathscr{T}(G,\mathbb{K})$:

$$\Big(i(x)i(y)\Big)(f) = \sum i(x)(f_{(1)})i(y)(f_{(2)}) = \sum f_{(1)}(x)f_{(2)}(y)$$
$$= \Delta(f)(x,y) = f(xy)$$

On pose $G_{\mathbb{K}} = \{\text{morphismes d'algèbres } \mathscr{T}(G,\mathbb{K}) \to \mathbb{K}\}$ muni de

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathbb{K}} \times G_{\mathbb{K}} & \to & G_{\mathbb{K}} \\ (s,t) & \mapsto & st : f \mapsto (s \otimes t)(\Delta(f)) \end{array}.$$

$G_{\mathbb{K}}$ est un groupe avec $t^{-1} = t \circ S$, $e_{G_{\mathbb{K}}} = \varepsilon$ et on a l'application canonique

$$i : \begin{array}{ccc} G & \to & G_{\mathbb{K}} \\ g & \mapsto & i(g) : f \mapsto f(g) \end{array}.$$

Proposition

L'application i est un morphisme injectif.

Démonstration : D'une part, si $x, y \in G_{\mathbb{K}}$ et $f \in \mathscr{T}(G,\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} \Big(i(x)i(y)\Big)(f) &= \sum i(x)(f_{(1)})i(y)(f_{(2)}) = \sum f_{(1)}(x)f_{(2)}(y) \\ &= \Delta(f)(x,y) = f(xy) = i(xy)(f). \end{aligned}$$

On pose $G_{\mathbb{K}} = \{\text{morphismes d'algèbres } \mathscr{T}(G,\mathbb{K}) \to \mathbb{K}\}$ muni de

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathbb{K}} \times G_{\mathbb{K}} & \to & G_{\mathbb{K}} \\ (s,t) & \mapsto & st : f \mapsto (s \otimes t)(\Delta(f)) \end{array}.$$

$G_{\mathbb{K}}$ est un groupe avec $t^{-1} = t \circ S$, $e_{G_{\mathbb{K}}} = \varepsilon$ et on a l'application canonique

$$i : \begin{array}{ccc} G & \to & G_{\mathbb{K}} \\ g & \mapsto & i(g) : f \mapsto f(g) \end{array}.$$

Proposition

L'application i est un morphisme injectif.

Démonstration : D'une part, si $x, y \in G_{\mathbb{K}}$ et $f \in \mathscr{T}(G,\mathbb{K})$:

$$\Big(i(x)i(y)\Big)(f) = \sum i(x)(f_{(1)})i(y)(f_{(2)}) = \sum f_{(1)}(x)f_{(2)}(y)$$
$$= \Delta(f)(x,y) = f(xy) = i(xy)(f).$$

D'autre part, i injective $\iff$ $\mathscr{T}(G,\mathbb{K})$ sépare les points de G.

On munit $G_{\mathbb{K}}$ de la topologie donnée par

$$t_i \xrightarrow[i \to +\infty]{} t \iff \forall f \in \mathscr{T}(G, \mathbb{K}),\ t_i(f) \xrightarrow[i \to +\infty]{} t(f),$$

On munit $G_{\mathbb{K}}$ de la topologie donnée par

$$t_i \xrightarrow[i\to+\infty]{} t \iff \forall f \in \mathscr{T}(G,\mathbb{K}),\ t_i(f) \xrightarrow[i\to+\infty]{} t(f),$$

i.e. la topologie initiale pour les λ_f : $\begin{array}{ccc} G_{\mathbb{K}} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & t(f) \end{array}$, $f \in \mathscr{T}(G,\mathbb{K})$.

On munit $G_{\mathbb{K}}$ de la topologie donnée par

$$t_i \xrightarrow[i\to+\infty]{} t \iff \forall f \in \mathscr{T}(G,\mathbb{K}),\ t_i(f) \xrightarrow[i\to+\infty]{} t(f),$$

i.e. la topologie initiale pour les $\lambda_f : \begin{array}{ccc} G_{\mathbb{K}} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & t(f) \end{array}$, $f \in \mathscr{T}(G,\mathbb{K})$.

Proposition

$G_{\mathbb{K}}$ est un groupe topologique et $i : G \to G_{\mathbb{K}}$ est continue.

On munit $G_{\mathbb{K}}$ de la topologie donnée par

$$t_i \xrightarrow[i\to+\infty]{} t \iff \forall f \in \mathscr{T}(G,\mathbb{K}),\ t_i(f) \xrightarrow[i\to+\infty]{} t(f),$$

i.e. la topologie initiale pour les λ_f : $\begin{array}{ccc} G_{\mathbb{K}} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & t(f) \end{array}$, $f \in \mathscr{T}(G,\mathbb{K})$.

Proposition

$G_{\mathbb{K}}$ est un groupe topologique et $i : G \to G_{\mathbb{K}}$ est continue.

On a mieux :

On munit $G_{\mathbb{K}}$ de la topologie donnée par

$$t_i \xrightarrow[i\to+\infty]{} t \iff \forall f \in \mathscr{T}(G,\mathbb{K}),\ t_i(f) \xrightarrow[i\to+\infty]{} t(f),$$

i.e. la topologie initiale pour les $\lambda_f : \begin{array}{ccc} G_{\mathbb{K}} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & t(f) \end{array}$, $f \in \mathscr{T}(G,\mathbb{K})$.

Proposition

$G_{\mathbb{K}}$ est un groupe topologique et $i : G \to G_{\mathbb{K}}$ est continue.

On a mieux :

Théorème

$G_{\mathbb{K}}$ est un groupe de Lie linéaire.

On munit $G_{\mathbb{K}}$ de la topologie donnée par

$$t_i \xrightarrow[i\to+\infty]{} t \iff \forall f \in \mathscr{T}(G,\mathbb{K}),\ t_i(f) \xrightarrow[i\to+\infty]{} t(f),$$

i.e. la topologie initiale pour les $\lambda_f : \begin{array}{ccc} G_{\mathbb{K}} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & t(f) \end{array}$, $f \in \mathscr{T}(G,\mathbb{K})$.

Proposition

$G_{\mathbb{K}}$ est un groupe topologique et $i : G \to G_{\mathbb{K}}$ est continue.

On a mieux :

Théorème

$G_{\mathbb{K}}$ est un groupe de Lie linéaire.

Démonstration :

On munit $G_{\mathbb{K}}$ de la topologie donnée par

$$t_i \xrightarrow[i\to+\infty]{} t \iff \forall f \in \mathscr{T}(G,\mathbb{K}),\ t_i(f) \xrightarrow[i\to+\infty]{} t(f),$$

i.e. la topologie initiale pour les $\lambda_f : \begin{array}{ccc} G_{\mathbb{K}} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & t(f) \end{array}$, $f \in \mathscr{T}(G,\mathbb{K})$.

Proposition

$G_{\mathbb{K}}$ est un groupe topologique et $i : G \to G_{\mathbb{K}}$ est continue.

On a mieux :

Théorème

$G_{\mathbb{K}}$ est un groupe de Lie linéaire.

Démonstration : Le théorème de Peter-Weyl donne $\mathscr{T}(G,\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}[X_{ij}]/I$

On munit $G_{\mathbb{K}}$ de la topologie donnée par

$$t_i \xrightarrow[i\to+\infty]{} t \iff \forall f \in \mathscr{T}(G,\mathbb{K}),\ t_i(f) \xrightarrow[i\to+\infty]{} t(f),$$

i.e. la topologie initiale pour les λ_f : $\begin{array}{ccc} G_{\mathbb{K}} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & t(f) \end{array}$, $f \in \mathscr{T}(G,\mathbb{K})$.

Proposition

$G_{\mathbb{K}}$ est un groupe topologique et $i : G \to G_{\mathbb{K}}$ est continue.

On a mieux :

Théorème

$G_{\mathbb{K}}$ est un groupe de Lie linéaire.

Démonstration : Le théorème de Peter-Weyl donne $\mathscr{T}(G,\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}[X_{ij}]/I$ et on montre que

$$G_{\mathbb{K}} \simeq V(I) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid \forall P \in I,\ P(A) = 0\}.$$

$\square$

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

En prenant $r : G \to O(n, \mathbb{R})$ dans le théorème précédent, on obtient :

Corollaire

$G_{\mathbb{R}}$ est compact.

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

En prenant $r : G \to O(n, \mathbb{R})$ dans le théorème précédent, on obtient :

Corollaire

$G_{\mathbb{R}}$ est compact.

L'application $\lambda : \begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G, \mathbb{R}) & \to & \mathscr{T}(G_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \lambda_f : s \mapsto s(f) \end{array}$ est un morphisme d'algèbres.

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

En prenant $r : G \to O(n, \mathbb{R})$ dans le théorème précédent, on obtient :

Corollaire

$G_{\mathbb{R}}$ est compact.

L'application $\lambda : \begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G, \mathbb{R}) & \to & \mathscr{T}(G_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \lambda_f : s \mapsto s(f) \end{array}$ est un morphisme d'algèbres.

Proposition

L'application $\lambda : \mathscr{T}(G, \mathbb{R}) \to \mathscr{T}(G_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ est un isomorphisme d'algèbres.

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

En prenant $r : G \to O(n, \mathbb{R})$ dans le théorème précédent, on obtient :

Corollaire

$G_{\mathbb{R}}$ est compact.

L'application $\lambda : \begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G, \mathbb{R}) & \to & \mathscr{T}(G_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \lambda_f : s \mapsto s(f) \end{array}$ est un morphisme d'algèbres.

Proposition

L'application $\lambda : \mathscr{T}(G, \mathbb{R}) \to \mathscr{T}(G_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ est un isomorphisme d'algèbres.

<u>Démonstration</u> :

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

En prenant $r : G \to O(n, \mathbb{R})$ dans le théorème précédent, on obtient :

Corollaire

$G_{\mathbb{R}}$ est compact.

L'application $\lambda : \begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G, \mathbb{R}) & \to & \mathscr{T}(G_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \lambda_f : s \mapsto s(f) \end{array}$ est un morphisme d'algèbres.

Proposition

L'application $\lambda : \mathscr{T}(G, \mathbb{R}) \to \mathscr{T}(G_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ est un isomorphisme d'algèbres.

Démonstration : Il est injectif car $i : G \to G_{\mathbb{R}}$ est injective et surjectif via Stone-Weierstrass. $\square$

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

En prenant $r : G \to O(n, \mathbb{R})$ dans le théorème précédent, on obtient :

Corollaire

$G_{\mathbb{R}}$ est compact.

L'application $\lambda : \begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G, \mathbb{R}) & \to & \mathscr{T}(G_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \lambda_f : s \mapsto s(f) \end{array}$ est un morphisme d'algèbres.

Proposition

L'application $\lambda : \mathscr{T}(G, \mathbb{R}) \to \mathscr{T}(G_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ est un isomorphisme d'algèbres.

Démonstration : Il est injectif car $i : G \to G_{\mathbb{R}}$ est injective et surjectif via Stone-Weierstrass. □

En particulier, $f \in \mathscr{T}(G_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ est constante si et seulement si $f_{|G}$ est constante.

Théorème

L'application $i : G \to G_{\mathbb{R}}$ est un isomorphisme de groupes de Lie.

Théorème

L'application $i : G \to G_{\mathbb{R}}$ est un isomorphisme de groupes de Lie.

<u>Démonstration</u> :

Théorème

L'application $i : G \to G_{\mathbb{R}}$ est un isomorphisme de groupes de Lie.

Démonstration : On fixe $f \in \mathscr{T}(G_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ et $V = G_{\mathbb{R}} \cdot f = V^{G_{\mathbb{R}}} \oplus S$ avec

$$V^{G_{\mathbb{R}}} \simeq \mathrm{Hom}(V_{\mathrm{triv}}, V) \otimes V_{\mathrm{triv}} \text{ et } S = \bigoplus_{\pi \neq \pi_{\mathrm{triv}}} \mathrm{Hom}(V_{\pi}, V) \otimes V_{\pi}.$$

Théorème

L'application $i : G \to G_{\mathbb{R}}$ est un isomorphisme de groupes de Lie.

Démonstration : On fixe $f \in \mathscr{T}(G_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ et $V = G_{\mathbb{R}} \cdot f = V^{G_{\mathbb{R}}} \oplus S$ avec

$$V^{G_{\mathbb{R}}} \simeq \mathrm{Hom}(V_{\mathrm{triv}}, V) \otimes V_{\mathrm{triv}} \text{ et } S = \bigoplus_{\pi \neq \pi_{\mathrm{triv}}} \mathrm{Hom}(V_\pi, V) \otimes V_\pi.$$

$S^{G_{\mathbb{R}}} = \{0\}$ donc $S^G = \{0\}$

Théorème

L'application $i : G \to G_{\mathbb{R}}$ est un isomorphisme de groupes de Lie.

Démonstration : On fixe $f \in \mathscr{T}(G_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ et $V = G_{\mathbb{R}} \cdot f = V^{G_{\mathbb{R}}} \oplus S$ avec

$$V^{G_{\mathbb{R}}} \simeq \mathrm{Hom}(V_{\mathrm{triv}}, V) \otimes V_{\mathrm{triv}} \text{ et } S = \bigoplus_{\pi \neq \pi_{\mathrm{triv}}} \mathrm{Hom}(V_\pi, V) \otimes V_\pi.$$

$S^{G_{\mathbb{R}}} = \{0\}$ donc $S^G = \{0\}$ et si $f = f_0 + f_1$:

Théorème

L'application $i : G \to G_{\mathbb{R}}$ est un isomorphisme de groupes de Lie.

Démonstration : On fixe $f \in \mathscr{T}(G_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ et $V = G_{\mathbb{R}} \cdot f = V^{G_{\mathbb{R}}} \oplus S$ avec

$$V^{G_{\mathbb{R}}} \simeq \mathrm{Hom}(V_{\mathrm{triv}}, V) \otimes V_{\mathrm{triv}} \text{ et } S = \bigoplus_{\pi \neq \pi_{\mathrm{triv}}} \mathrm{Hom}(V_\pi, V) \otimes V_\pi.$$

$S^{G_{\mathbb{R}}} = \{0\}$ donc $S^G = \{0\}$ et si $f = f_0 + f_1$:

$$\int_{G_{\mathbb{R}}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{G_{\mathbb{R}}} f_0(x)\mathrm{d}x$$

Théorème

L'application $i : G \to G_{\mathbb{R}}$ est un isomorphisme de groupes de Lie.

Démonstration : On fixe $f \in \mathscr{T}(G_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ et $V = G_{\mathbb{R}} \cdot f = V^{G_{\mathbb{R}}} \oplus S$ avec

$$V^{G_{\mathbb{R}}} \simeq \mathrm{Hom}(V_{\mathrm{triv}}, V) \otimes V_{\mathrm{triv}} \text{ et } S = \bigoplus_{\pi \neq \pi_{\mathrm{triv}}} \mathrm{Hom}(V_\pi, V) \otimes V_\pi.$$

$S^{G_{\mathbb{R}}} = \{0\}$ donc $S^G = \{0\}$ et si $f = f_0 + f_1$:

$$\int_{G_{\mathbb{R}}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{G_{\mathbb{R}}} f_0(x)\mathrm{d}x = \int_G f_{0|G}(x)\mathrm{d}x$$

Théorème

L'application $i : G \to G_{\mathbb{R}}$ est un isomorphisme de groupes de Lie.

<u>Démonstration</u> : On fixe $f \in \mathscr{T}(G_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ et $V = G_{\mathbb{R}} \cdot f = V^{G_{\mathbb{R}}} \oplus S$ avec

$$V^{G_{\mathbb{R}}} \simeq \mathrm{Hom}(V_{\mathrm{triv}}, V) \otimes V_{\mathrm{triv}} \text{ et } S = \bigoplus_{\pi \neq \pi_{\mathrm{triv}}} \mathrm{Hom}(V_\pi, V) \otimes V_\pi.$$

$S^{G_{\mathbb{R}}} = \{0\}$ donc $S^G = \{0\}$ et si $f = f_0 + f_1$:

$$\int_{G_{\mathbb{R}}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{G_{\mathbb{R}}} f_0(x)\mathrm{d}x = \int_G f_{0|G}(x)\mathrm{d}x = \int_G f_{|G}(x)\mathrm{d}x.$$

Théorème

L'application $i : G \to G_{\mathbb{R}}$ est un isomorphisme de groupes de Lie.

Démonstration : On fixe $f \in \mathscr{T}(G_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ et $V = G_{\mathbb{R}} \cdot f = V^{G_{\mathbb{R}}} \oplus S$ avec

$$V^{G_{\mathbb{R}}} \simeq \mathrm{Hom}(V_{\mathrm{triv}}, V) \otimes V_{\mathrm{triv}} \text{ et } S = \bigoplus_{\pi \neq \pi_{\mathrm{triv}}} \mathrm{Hom}(V_\pi, V) \otimes V_\pi.$$

$S^{G_{\mathbb{R}}} = \{0\}$ donc $S^G = \{0\}$ et si $f = f_0 + f_1$:

$$\int_{G_{\mathbb{R}}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{G_{\mathbb{R}}} f_0(x)\mathrm{d}x = \int_G f_{0|G}(x)\mathrm{d}x = \int_G f_{|G}(x)\mathrm{d}x.$$

Par le théorème de Peter-Weyl :

$$\forall f \in C(G_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}), \quad \int_{G_{\mathbb{R}}} f(x)\mathrm{d}x = \int_G f_{|G}(x)\mathrm{d}x$$

Théorème

L'application $i : G \to G_{\mathbb{R}}$ est un isomorphisme de groupes de Lie.

Démonstration : On fixe $f \in \mathscr{T}(G_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ et $V = G_{\mathbb{R}} \cdot f = V^{G_{\mathbb{R}}} \oplus S$ avec

$$V^{G_{\mathbb{R}}} \simeq \mathrm{Hom}(V_{\mathrm{triv}}, V) \otimes V_{\mathrm{triv}} \text{ et } S = \bigoplus_{\pi \neq \pi_{\mathrm{triv}}} \mathrm{Hom}(V_\pi, V) \otimes V_\pi .$$

$S^{G_{\mathbb{R}}} = \{0\}$ donc $S^G = \{0\}$ et si $f = f_0 + f_1$:

$$\int_{G_{\mathbb{R}}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{G_{\mathbb{R}}} f_0(x)\mathrm{d}x = \int_G f_{0|G}(x)\mathrm{d}x = \int_G f_{|G}(x)\mathrm{d}x.$$

Par le théorème de Peter-Weyl :

$$\forall f \in C(G_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}), \quad \int_{G_{\mathbb{R}}} f(x)\mathrm{d}x = \int_G f_{|G}(x)\mathrm{d}x$$

donc $i(G) = G_{\mathbb{R}}$. □

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Corollaire

$G_{\mathbb{C}}$ est un groupe de Lie complexe.

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Corollaire

$G_{\mathbb{C}}$ est un groupe de Lie complexe.

Démonstration :

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Corollaire

$G_{\mathbb{C}}$ est un groupe de Lie complexe.

Démonstration : $G_{\mathbb{C}} = V(I)$ est un groupe algébrique complexe.

$\square$

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Corollaire

$G_{\mathbb{C}}$ est un groupe de Lie complexe.

Démonstration : $G_{\mathbb{C}} = V(I)$ est un groupe algébrique complexe. $\square$

$G_{\mathbb{C}}$ vérifie la propriété universelle suivante :

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Corollaire

$G_{\mathbb{C}}$ est un groupe de Lie complexe.

Démonstration : $G_{\mathbb{C}} = V(I)$ est un groupe algébrique complexe.

$\square$

$G_{\mathbb{C}}$ vérifie la propriété universelle suivante :

Proposition

Pour tout représentation $r : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, il existe une unique représentation holomorphe $r_{\mathbb{C}} : G_{\mathbb{C}} \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ telle que $r_{\mathbb{C}} \circ i = r$ et vérifiant

$$r_{\mathbb{C}}(s) = (s(r_{ij}))_{ij}.$$

Involution de Cartan

Involution de Cartan

Pour $s \in G_{\mathbb{C}}$, on pose $\Theta(s) : \begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G, \mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \overline{s\left(\overline{f}\right)} \end{array}$.

Involution de Cartan

Pour $s \in G_{\mathbb{C}}$, on pose $\Theta(s) : \begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G, \mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \overline{s\left(\overline{f}\right)} \end{array}$.

Lemme

Le sous-groupe $G'_{\mathbb{R}} = \{s \in G_{\mathbb{C}} \mid \Theta(s) = s\} \subset G_{\mathbb{C}}$ *est isomorphe à* G.

Involution de Cartan

Pour $s \in G_{\mathbb{C}}$, on pose $\Theta(s) : \begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G, \mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \overline{s\left(\overline{f}\right)} \end{array}$.

Lemme

Le sous-groupe $G'_{\mathbb{R}} = \{s \in G_{\mathbb{C}} \mid \Theta(s) = s\} \subset G_{\mathbb{C}}$ est isomorphe à G.

Si $r : G \to \mathrm{U}(n)$ et $s \in G_{\mathbb{C}}$, on a

$$r_{\mathbb{C}}(\Theta(s))$$

Involution de Cartan

Pour $s \in G_{\mathbb{C}}$, on pose $\Theta(s)$: $\begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G,\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \overline{s\left(\overline{f}\right)} \end{array}$.

Lemme

Le sous-groupe $G'_{\mathbb{R}} = \{s \in G_{\mathbb{C}} \mid \Theta(s) = s\} \subset G_{\mathbb{C}}$ est isomorphe à G.

Si $r : G \to \mathrm{U}(n)$ et $s \in G_{\mathbb{C}}$, on a

$$r_{\mathbb{C}}(\Theta(s)) = (\tilde{s}(r_{ij}))_{ij}$$

Involution de Cartan

Pour $s \in G_{\mathbb{C}}$, on pose $\Theta(s)$: $\begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G, \mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \overline{s\left(\overline{f}\right)} \end{array}$.

Lemme

Le sous-groupe $G'_{\mathbb{R}} = \{s \in G_{\mathbb{C}} \mid \Theta(s) = s\} \subset G_{\mathbb{C}}$ est isomorphe à G.

Si $r : G \to \mathrm{U}(n)$ et $s \in G_{\mathbb{C}}$, on a

$$r_{\mathbb{C}}(\Theta(s)) = (\tilde{s}(r_{ij}))_{ij} = \overline{(s\,(\overline{r_{ij}}))_{ij}}$$

Involution de Cartan

Pour $s \in G_{\mathbb{C}}$, on pose $\Theta(s)$: $\begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G,\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \overline{s\left(\overline{f}\right)} \end{array}$.

Lemme

Le sous-groupe $G'_{\mathbb{R}} = \{s \in G_{\mathbb{C}} \mid \Theta(s) = s\} \subset G_{\mathbb{C}}$ est isomorphe à G.

Si $r : G \to \mathrm{U}(n)$ et $s \in G_{\mathbb{C}}$, on a

$$r_{\mathbb{C}}(\Theta(s)) = (\tilde{s}(r_{ij}))_{ij} = \overline{(s\left(\overline{r_{ij}}\right))_{ij}} = \overline{{}^t(s(r_{ij}))_{ij}^{-1}}$$

Involution de Cartan

Pour $s \in G_{\mathbb{C}}$, on pose $\Theta(s)$: $\begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G,\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \overline{s\left(\overline{f}\right)} \end{array}$.

Lemme

Le sous-groupe $G'_{\mathbb{R}} = \{s \in G_{\mathbb{C}} \mid \Theta(s) = s\} \subset G_{\mathbb{C}}$ est isomorphe à G.

Si $r : G \to \mathrm{U}(n)$ et $s \in G_{\mathbb{C}}$, on a

$$r_{\mathbb{C}}(\Theta(s)) = (\tilde{s}(r_{ij}))_{ij} = \overline{\left(s\left(\overline{r_{ij}}\right)\right)_{ij}} = \overline{{}^t(s(r_{ij}))_{ij}^{-1}} = \overline{{}^t r_{\mathbb{C}}(s)^{-1}}.$$

Involution de Cartan

Pour $s \in G_{\mathbb{C}}$, on pose $\Theta(s)$: $\begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G,\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \overline{s\left(\overline{f}\right)} \end{array}$.

Lemme

Le sous-groupe $G'_{\mathbb{R}} = \{s \in G_{\mathbb{C}} \mid \Theta(s) = s\} \subset G_{\mathbb{C}}$ est isomorphe à G.

Si $r : G \to \mathrm{U}(n)$ et $s \in G_{\mathbb{C}}$, on a

$$r_{\mathbb{C}}(\Theta(s)) = (\tilde{s}(r_{ij}))_{ij} = \overline{(s\left(\overline{r_{ij}}\right))_{ij}} = \overline{{}^t(s(r_{ij}))_{ij}^{-1}} = \overline{{}^t r_{\mathbb{C}}(s)^{-1}}.$$

En identifiant $G_{\mathbb{C}}$ à $r_{\mathbb{C}} G_{\mathbb{C}}$, on a $\Theta(A) = {}^t\overline{A}^{-1}$ et $G = G_{\mathbb{C}} \cap \mathrm{U}(n)$.

Involution de Cartan

Pour $s \in G_{\mathbb{C}}$, on pose $\Theta(s)$: $\begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G,\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \overline{s\left(\overline{f}\right)} \end{array}$.

Lemme

Le sous-groupe $G'_{\mathbb{R}} = \{s \in G_{\mathbb{C}} \mid \Theta(s) = s\} \subset G_{\mathbb{C}}$ est isomorphe à G.

Si $r : G \to \mathrm{U}(n)$ et $s \in G_{\mathbb{C}}$, on a

$$r_{\mathbb{C}}(\Theta(s)) = (\tilde{s}(r_{ij}))_{ij} = \overline{(s\left(\overline{r_{ij}}\right))_{ij}} = \overline{{}^t(s(r_{ij}))_{ij}^{-1}} = \overline{{}^t r_{\mathbb{C}}(s)^{-1}}.$$

En identifiant $G_{\mathbb{C}}$ à $r_{\mathbb{C}} G_{\mathbb{C}}$, on a $\Theta(A) = {}^t\overline{A}^{-1}$ et $G = G_{\mathbb{C}} \cap \mathrm{U}(n)$.

On pose $\theta = \mathrm{d}\Theta$: $\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{g} \\ A & \mapsto & -{}^t\overline{A} \end{array}$.

Involution de Cartan

Pour $s \in G_{\mathbb{C}}$, on pose $\Theta(s)$: $\begin{array}{ccc} \mathscr{T}(G,\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \overline{s\left(\overline{f}\right)} \end{array}$.

Lemme

Le sous-groupe $G'_{\mathbb{R}} = \{s \in G_{\mathbb{C}} \mid \Theta(s) = s\} \subset G_{\mathbb{C}}$ est isomorphe à G.

Si $r : G \to \mathrm{U}(n)$ et $s \in G_{\mathbb{C}}$, on a

$$r_{\mathbb{C}}(\Theta(s)) = (\tilde{s}(r_{ij}))_{ij} = \overline{(s\left(\overline{r_{ij}}\right))_{ij}} = \overline{{}^t(s(r_{ij}))_{ij}^{-1}} = \overline{{}^t r_{\mathbb{C}}(s)^{-1}}.$$

En identifiant $G_{\mathbb{C}}$ à $r_{\mathbb{C}} G_{\mathbb{C}}$, on a $\Theta(A) = {}^t\overline{A}^{-1}$ et $G = G_{\mathbb{C}} \cap \mathrm{U}(n)$.

On pose $\theta = \mathrm{d}\Theta$: $\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{g} \\ A & \mapsto & -{}^t\overline{A} \end{array}$.

Proposition

θ est un automorphisme d'algèbre de Lie involutif et induit la décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{k} \simeq \mathfrak{k} \otimes \mathbb{C}.$$

Théorème (Décomposition polaire)

Si $A = UH$ est la décomposition polaire de $A \in G_{\mathbb{C}} \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ alors $U, H \in G_{\mathbb{C}}$. De plus, l'application

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathrm{Lie}(G) & \to & G_{\mathbb{C}} \\ (U, H) & \mapsto & Ue^{iH} \end{array}$$

est un difféomorphisme.

Théorème (Décomposition polaire)

Si $A = UH$ est la décomposition polaire de $A \in G_{\mathbb{C}} \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ alors $U, H \in G_{\mathbb{C}}$. De plus, l'application

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathrm{Lie}(G) & \to & G_{\mathbb{C}} \\ (U, H) & \mapsto & Ue^{iH} \end{array}$$

est un difféomorphisme.

Quelques exemples :

Théorème (Décomposition polaire)

Si $A = UH$ est la décomposition polaire de $A \in G_{\mathbb{C}} \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ alors $U, H \in G_{\mathbb{C}}$. De plus, l'application

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathrm{Lie}(G) & \to & G_{\mathbb{C}} \\ (U, H) & \mapsto & Ue^{iH} \end{array}$$

est un difféomorphisme.

Quelques exemples :

G	

Théorème (Décomposition polaire)

Si $A = UH$ est la décomposition polaire de $A \in G_{\mathbb{C}} \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ alors $U, H \in G_{\mathbb{C}}$. De plus, l'application

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathrm{Lie}(G) & \to & G_{\mathbb{C}} \\ (U, H) & \mapsto & Ue^{iH} \end{array}$$

est un difféomorphisme.

Quelques exemples :

G	$\mathrm{U}(n)$	$\mathrm{SU}(n)$	$\mathbb{T}$	$\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$	$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{H})$

Théorème (Décomposition polaire)

Si $A = UH$ *est la décomposition polaire de* $A \in G_{\mathbb{C}} \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ *alors* $U, H \in G_{\mathbb{C}}$. *De plus, l'application*

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathrm{Lie}(G) & \to & G_{\mathbb{C}} \\ (U, H) & \mapsto & Ue^{iH} \end{array}$$

est un difféomorphisme.

Quelques exemples :

G	$\mathrm{U}(n)$	$\mathrm{SU}(n)$	$\mathbb{T}$	$\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$	$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{H})$
$G_{\mathbb{C}}$					

Théorème (Décomposition polaire)

Si $A = UH$ est la décomposition polaire de $A \in G_{\mathbb{C}} \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ alors $U, H \in G_{\mathbb{C}}$. De plus, l'application

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathrm{Lie}(G) & \to & G_{\mathbb{C}} \\ (U, H) & \mapsto & Ue^{iH} \end{array}$$

est un difféomorphisme.

Quelques exemples :

G	$\mathrm{U}(n)$	$\mathrm{SU}(n)$	$\mathbb{T}$	$\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$	$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{H})$
$G_{\mathbb{C}}$	$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$	$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$			

Théorème (Décomposition polaire)

Si $A = UH$ est la décomposition polaire de $A \in G_{\mathbb{C}} \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ alors $U, H \in G_{\mathbb{C}}$. De plus, l'application

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathrm{Lie}(G) & \to & G_{\mathbb{C}} \\ (U, H) & \mapsto & Ue^{iH} \end{array}$$

est un difféomorphisme.

Quelques exemples :

G	$\mathrm{U}(n)$	$\mathrm{SU}(n)$	$\mathbb{T}$	$\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$	$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{H})$
$G_{\mathbb{C}}$	$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$	$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$	$\mathbb{C}^*$		

Théorème (Décomposition polaire)

Si $A = UH$ est la décomposition polaire de $A \in G_{\mathbb{C}} \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ alors $U, H \in G_{\mathbb{C}}$. De plus, l'application

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathrm{Lie}(G) & \rightarrow & G_{\mathbb{C}} \\ (U, H) & \mapsto & Ue^{iH} \end{array}$$

est un difféomorphisme.

Quelques exemples :

G	$\mathrm{U}(n)$	$\mathrm{SU}(n)$	$\mathbb{T}$	$\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$	$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{H})$
$G_{\mathbb{C}}$	$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$	$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$	$\mathbb{C}^*$	$\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$	

Théorème (Décomposition polaire)

Si $A = UH$ est la décomposition polaire de $A \in G_{\mathbb{C}} \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ alors $U, H \in G_{\mathbb{C}}$. De plus, l'application

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathrm{Lie}(G) & \to & G_{\mathbb{C}} \\ (U, H) & \mapsto & Ue^{iH} \end{array}$$

est un difféomorphisme.

Quelques exemples :

G	$\mathrm{U}(n)$	$\mathrm{SU}(n)$	$\mathbb{T}$	$\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$	$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{H})$
$G_{\mathbb{C}}$	$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$	$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$	$\mathbb{C}^*$	$\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$	$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$