Le théorème de Borel-Weil

Valentin Massicot

Université de Reims Champagne-Ardenne

8 octobre 2025

Sommaire

Sommaire

Induction pour les groupes finis

$H \subset G$: groupes finis, $\qquad (\chi, V)$: rep. de H, $\qquad G/H = \{g_1 H, \ldots, g_r H\}$.

But : définir une représentation de G.

Induction pour les groupes finis

$H \subset G$: groupes finis, (χ, V) : rep. de H, $G/H = \{g_1 H, \ldots, g_r H\}$.

But : définir une représentation de G.

Trois constructions équivalentes :

Induction pour les groupes finis

$H \subset G$: groupes finis, (χ, V) : rep. de H, $G/H = \{g_1H, \dots, g_rH\}$.

But : définir une représentation de G.

Trois constructions équivalentes :

- $\mathrm{ind}_H^G \chi := \bigoplus_{i=1}^{r} \{g_i\} \times V$ avec $\pi(g)(g_i, v) = (g_j, \chi(h)v)$ où $gg_i = g_jh$.

Induction pour les groupes finis

$H \subset G$: groupes finis, (χ, V) : rep. de H, $G/H = \{g_1H, \dots, g_rH\}$.

But : définir une représentation de G.

Trois constructions équivalentes :

- $\mathrm{ind}_H^G \chi := \bigoplus_{i=1}^{r} \{g_i\} \times V$ avec $\pi(g)(g_i, v) = (g_j, \chi(h)v)$ où $gg_i = g_jh$.
- $\mathrm{ind}_H^G \chi := \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} V$ avec $\pi(g)(g' \otimes v) = (gg' \otimes v)$.

Induction pour les groupes finis

$H \subset G$: groupes finis, $\quad (\chi, V)$: rep. de H, $\quad G/H = \{g_1 H, \dots, g_r H\}$.

But : définir une représentation de G.

Trois constructions équivalentes :

- $\mathrm{ind}_H^G \chi := \bigoplus_{i=1}^{r} \{g_i\} \times V$ avec $\pi(g)(g_i, v) = (g_j, \chi(h)v)$ où $gg_i = g_j h$.
- $\mathrm{ind}_H^G \chi := \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} V$ avec $\pi(g)(g' \otimes v) = (gg' \otimes v)$.
- $\mathrm{ind}_H^G \chi := \{f : G \to V \mid f(gh) = \chi(h)^{-1} f(g)\}$ avec $\pi(g) f(g') = f(g^{-1} g')$.

Induction pour les groupes de Lie

G : groupe de Lie, $H \subset G$ fermé, (χ, V) : rep. de dim. finie de H.

Induction pour les groupes de Lie

G : groupe de Lie, $\quad H \subset G$ fermé, $\quad (\chi, V)$: rep. de dim. finie de H.

On pose

$$\mathrm{ind}_H^G \chi := \{f \in C^\infty(G, V) \mid \forall g \in G, \forall h \in H,\ f(gh) = \chi(h)^{-1} f(g)\}.$$

Induction pour les groupes de Lie

G : groupe de Lie, $\qquad H \subset G$ fermé, $\qquad (\chi, V)$: rep. de dim. finie de H.

On pose

$$\mathrm{ind}_H^G \chi := \{f \in C^\infty(G, V) \mid \forall g \in G, \forall h \in H,\ f(gh) = \chi(h)^{-1} f(g)\}.$$

Théorème (Réciprocité de Frobenius)

Si (W, τ) est une représentation de G alors

$$\mathrm{Hom}_G(W, \mathrm{ind}_H^G \chi) \simeq \mathrm{Hom}_H(W_{|H}, V).$$

Induction pour les groupes de Lie

G : groupe de Lie, $H \subset G$ fermé, (χ, V) : rep. de dim. finie de H.

On pose

$$\mathrm{ind}_H^G \chi := \{f \in C^\infty(G, V) \mid \forall g \in G, \forall h \in H,\ f(gh) = \chi(h)^{-1} f(g)\}.$$

Théorème (Réciprocité de Frobenius)

Si (W, τ) est une représentation de G alors

$$\mathrm{Hom}_G(W, \mathrm{ind}_H^G \chi) \simeq \mathrm{Hom}_H(W_{|H}, V).$$

Si χ est "petite", $\mathrm{ind}_H^G \chi$ est "grande".

Induction pour les groupes de Lie

G : groupe de Lie, $\quad H \subset G$ fermé, $\quad (\chi, V)$: rep. de dim. finie de H.

On pose

$$\mathrm{ind}_H^G \chi := \{f \in C^\infty(G, V) \mid \forall g \in G, \forall h \in H,\ f(gh) = \chi(h)^{-1} f(g)\}.$$

Théorème (Réciprocité de Frobenius)

Si (W, τ) est une représentation de G alors

$$\mathrm{Hom}_G(W, \mathrm{ind}_H^G \chi) \simeq \mathrm{Hom}_H(W_{|H}, V).$$

Si χ est "petite", $\mathrm{ind}_H^G \chi$ est "grande".

But : Induire les caractères de T à K puis ajouter une contrainte d'holomorphie pour extraire un facteur irréductible.

Interprétation géométrique

G : groupe de Lie, $\quad H \subset G$ fermé, $\quad (\chi, V)$: rep. de dim. finie de H.

Interprétation géométrique

G : groupe de Lie, $\quad H \subset G$ fermé, $\quad (\chi, V)$: rep. de dim. finie de H.

On pose $\mathcal{V} = G \times_H V := (G \times V)/\sim$ où

$$\forall g \in G, \forall h \in H, \forall v \in V, \qquad (gh, v) \sim (g, \chi(h)v).$$

Interprétation géométrique

G : groupe de Lie, $\quad H \subset G$ fermé, $\quad (\chi, V)$: rep. de dim. finie de H.

On pose $\mathcal{V} = G \times_H V := (G \times V)/\sim$ où

$$\forall g \in G, \forall h \in H, \forall v \in V, \qquad (gh, v) \sim (g, \chi(h)v).$$

$\pi : \mathcal{V} \to G/H$ est un fibré vectoriel et les actions $G \curvearrowright \mathcal{V}, G/H$ sont compatibles :

$$\pi(g \cdot [x, v]) = \pi([gx, v]) = gxH = g \cdot xH = g \cdot \pi([x, v]).$$

Interprétation géométrique

G : groupe de Lie, $\quad H \subset G$ fermé, $\quad (\chi, V)$: rep. de dim. finie de H.

On pose $\mathcal{V} = G \times_H V := (G \times V)/\sim$ où

$$\forall g \in G, \forall h \in H, \forall v \in V, \qquad (gh, v) \sim (g, \chi(h)v).$$

$\pi : \mathcal{V} \to G/H$ est un fibré vectoriel et les actions $G \curvearrowright \mathcal{V}, G/H$ sont compatibles :

$$\pi(g \cdot [x, v]) = \pi([gx, v]) = gxH = g \cdot xH = g \cdot \pi([x, v]).$$

En particulier, $\Gamma(G/H, \mathcal{V})$ est une représentation de G avec

$$\rho(g)f(x) = gf(g^{-1}x).$$

Interprétation géométrique

G : groupe de Lie, $H \subset G$ fermé, (χ, V) : rep. de dim. finie de H.

On pose $\mathcal{V} = G \times_H V := (G \times V)/\sim$ où

$$\forall g \in G, \forall h \in H, \forall v \in V, \quad (gh, v) \sim (g, \chi(h)v).$$

$\pi : \mathcal{V} \to G/H$ est un fibré vectoriel et les actions $G \curvearrowright \mathcal{V}, G/H$ sont compatibles :

$$\pi(g \cdot [x, v]) = \pi([gx, v]) = gxH = g \cdot xH = g \cdot \pi([x, v]).$$

En particulier, $\Gamma(G/H, \mathcal{V})$ est une représentation de G avec

$$\rho(g)f(x) = gf(g^{-1}x).$$

Théorème

On a un isomorphisme de G-modules $\mathrm{ind}_H^G \chi \simeq \Gamma(G/H, \mathcal{V})$.

Sommaire

Structure complexe sur K/T

$$
\begin{array}{lll}
K\colon \text{compact}, & \mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K), & \mathfrak{g} = \mathfrak{k} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \\
T : \text{ tore maximal}, & \mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T), & \mathfrak{h} = \mathfrak{t} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.
\end{array}
$$

Structure complexe sur K/T

$$\begin{array}{ccc} K\colon \text{compact}, & \mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K), & \mathfrak{g} = \mathfrak{k} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \\ T : \ \textsf{tore maximal}, & \mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T), & \mathfrak{h} = \mathfrak{t} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}. \end{array}$$

Quelques rappels :

Structure complexe sur K/T

$$\begin{array}{ccc} K\colon \text{compact}, & \mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K), & \mathfrak{g} = \mathfrak{k} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \\ T:\ \textsf{tore maximal}, & \mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T), & \mathfrak{h} = \mathfrak{t} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}. \end{array}$$

Quelques rappels :

- On a la décomposition de Cartan

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

où

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall h \in \mathfrak{h},\, [h, x] = \alpha(h)x\},$$

$$\Phi = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \backslash \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}.$$

Structure complexe sur K/T

$$\begin{array}{lll} K\text{: compact}, & \mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K), & \mathfrak{g} = \mathfrak{k} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \\ T\text{ : tore maximal}, & \mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T), & \mathfrak{h} = \mathfrak{t} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}. \end{array}$$

Quelques rappels :

- On a la décomposition de Cartan

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

où

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall h \in \mathfrak{h},\, [h,x] = \alpha(h)x\},$$

$$\Phi = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \backslash \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}.$$

- K admet une représentation unitaire fidèle de dimension finie.

Structure complexe sur K/T

$$\begin{array}{ccc} K\text{: compact}, & \mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K), & \mathfrak{g} = \mathfrak{k} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \\ T\text{ : tore maximal}, & \mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T), & \mathfrak{h} = \mathfrak{t} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}. \end{array}$$

Quelques rappels :

- On a la décomposition de Cartan

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

  où

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall h \in \mathfrak{h},\ [h,x] = \alpha(h)x\},$$
$$\Phi = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \backslash \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}.$$

- K admet une représentation unitaire fidèle de dimension finie.
- K admet une unique complexification $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ vérifiant

$$K \subset G, \qquad \mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}.$$

On fixe une base Δ de Φ et on pose

$$\mathfrak{a} = i\mathfrak{t}, \qquad \mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha\in\Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \overline{\mathfrak{n}} = \bigoplus_{\alpha\in\Phi^-} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}.$$

On fixe une base Δ de Φ et on pose

$$\mathfrak{a} = i\mathfrak{t}, \qquad \mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \overline{\mathfrak{n}} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^-} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}.$$

On considère les sous-groupes $A, B, N \subset G$ correspondants.

On fixe une base Δ de Φ et on pose

$$\mathfrak{a} = i\mathfrak{t}, \qquad \mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \overline{\mathfrak{n}} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^-} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}.$$

On considère les sous-groupes $A, B, N \subset G$ correspondants.

Proposition

Les sous-groupes A, B, AN et B sont fermés dans G et on a les décompositions

$$\mathfrak{a} \overset{\exp}{\simeq} A, \qquad B = TAN, \qquad G = KAN.$$

On fixe une base Δ de Φ et on pose

$$\mathfrak{a} = i\mathfrak{t}, \qquad \mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \overline{\mathfrak{n}} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^-} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}.$$

On considère les sous-groupes $A, B, N \subset G$ correspondants.

Proposition

Les sous-groupes A, B, AN et B sont fermés dans G et on a les décompositions

$$\mathfrak{a} \overset{\exp}{\simeq} A, \qquad B = TAN, \qquad G = KAN.$$

On en déduit

On fixe une base Δ de Φ et on pose

$$\mathfrak{a} = i\mathfrak{t}, \qquad \mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \overline{\mathfrak{n}} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^-} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}.$$

On considère les sous-groupes $A, B, N \subset G$ correspondants.

Proposition

Les sous-groupes A, B, AN et B sont fermés dans G et on a les décompositions

$$\mathfrak{a} \overset{\exp}{\simeq} A, \qquad B = TAN, \qquad G = KAN.$$

On en déduit

Théorème

L'inclusion $K \hookrightarrow G$ induit un difféomorphisme $K/T \simeq G/B$.

On fixe une base Δ de Φ et on pose

$$\mathfrak{a} = i\mathfrak{t}, \qquad \mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \overline{\mathfrak{n}} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^-} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}.$$

On considère les sous-groupes $A, B, N \subset G$ correspondants.

Proposition

Les sous-groupes A, B, AN et B sont fermés dans G et on a les décompositions

$$\mathfrak{a} \overset{\exp}{\simeq} A, \qquad B = TAN, \qquad G = KAN.$$

On en déduit

Théorème

L'inclusion $K \hookrightarrow G$ induit un difféomorphisme $K/T \simeq G/B$.

En particulier, K/T admet une structure complexe K-invariante.

Structure complexe sur $K \times_T V$

K : compact, T : tore maximal, G : complexification de K, $\xi \in \widehat{T}$.

Structure complexe sur $K \times_T V$

K : compact, T : tore maximal, G : complexification de K, $\xi \in \widehat{T}$.

On prolonge ξ à B :

$$\xi_{\mathbb{C}}(tan) := \xi(t) e^{i \mathrm{d}\xi(\log a)}.$$

Structure complexe sur $K \times_T V$

K : compact, T : tore maximal, G : complexification de K, $\xi \in \widehat{T}$.

On prolonge ξ à B :

$$\xi_{\mathbb{C}}(tan) := \xi(t)e^{i\mathrm{d}\xi(\log a)}.$$

Proposition

On a $\xi_{\mathbb{C}} \in \widehat{B}$ *et* $G \times_B \mathbb{C}_{\xi_{\mathbb{C}}} \simeq K \times_T \mathbb{C}_{\xi}$.

Structure complexe sur $K \times_T V$

K : compact, T : tore maximal, G : complexification de K, $\xi \in \widehat{T}$.

On prolonge ξ à B :

$$\xi_{\mathbb{C}}(tan) := \xi(t)e^{i\mathrm{d}\xi(\log a)}.$$

Proposition

On a $\xi_{\mathbb{C}} \in \widehat{B}$ et $G \times_B \mathbb{C}_{\xi_{\mathbb{C}}} \simeq K \times_T \mathbb{C}_{\xi}$.

Démonstration : L'isomorphisme $\Phi : K \times_T \mathbb{C}_\xi \to G \times_B \mathbb{C}_{\xi_{\mathbb{C}}}$ est donné par

$$\Phi(k, v) = (k, v).$$

Structure complexe sur $K \times_T V$

K : compact, T : tore maximal, G : complexification de K, $\xi \in \widehat{T}$.

On prolonge ξ à B :

$$\xi_{\mathbb{C}}(tan) := \xi(t)e^{i\mathrm{d}\xi(\log a)}.$$

Proposition

On a $\xi_{\mathbb{C}} \in \widehat{B}$ et $G \times_B \mathbb{C}_{\xi_{\mathbb{C}}} \simeq K \times_T \mathbb{C}_\xi$.

Démonstration : L'isomorphisme $\Phi : K \times_T \mathbb{C}_\xi \to G \times_B \mathbb{C}_{\xi_{\mathbb{C}}}$ est donné par

$$\Phi(k,v) = (k,v).$$

Il est :

Structure complexe sur $K \times_T V$

K : compact, T : tore maximal, G : complexification de K, $\xi \in \widehat{T}$.

On prolonge ξ à B :

$$\xi_{\mathbb{C}}(tan) := \xi(t)e^{i\mathrm{d}\xi(\log a)}.$$

Proposition

On a $\xi_{\mathbb{C}} \in \widehat{B}$ et $G \times_B \mathbb{C}_{\xi_{\mathbb{C}}} \simeq K \times_T \mathbb{C}_{\xi}$.

Démonstration : L'isomorphisme $\Phi : K \times_T \mathbb{C}_\xi \to G \times_B \mathbb{C}_{\xi_{\mathbb{C}}}$ est donné par

$$\Phi(k, v) = (k, v).$$

Il est :

- bien défini car $T \subset B$,

Structure complexe sur $K \times_T V$

K : compact, T : tore maximal, G : complexification de K, $\xi \in \widehat{T}$.

On prolonge ξ à B :

$$\xi_{\mathbb{C}}(tan) := \xi(t)e^{i\mathrm{d}\xi(\log a)}.$$

Proposition

On a $\xi_{\mathbb{C}} \in \widehat{B}$ et $G \times_B \mathbb{C}_{\xi_{\mathbb{C}}} \simeq K \times_T \mathbb{C}_{\xi}$.

Démonstration : L'isomorphisme $\Phi : K \times_T \mathbb{C}_\xi \to G \times_B \mathbb{C}_{\xi_{\mathbb{C}}}$ est donné par

$$\Phi(k, v) = (k, v).$$

Il est :

- bien défini car $T \subset B$,
- surjectif car $G = KB$,

Structure complexe sur $K \times_T V$

K : compact, T : tore maximal, G : complexification de K, $\xi \in \widehat{T}$.

On prolonge ξ à B :

$$\xi_{\mathbb{C}}(tan) := \xi(t)e^{i\mathrm{d}\xi(\log a)}.$$

Proposition

On a $\xi_{\mathbb{C}} \in \widehat{B}$ et $G \times_B \mathbb{C}_{\xi_{\mathbb{C}}} \simeq K \times_T \mathbb{C}_{\xi}$.

Démonstration : L'isomorphisme $\Phi : K \times_T \mathbb{C}_{\xi} \to G \times_B \mathbb{C}_{\xi_{\mathbb{C}}}$ est donné par

$$\Phi(k, v) = (k, v).$$

Il est :

- bien défini car $T \subset B$,
- surjectif car $G = KB$,
- injectif car $K \cap B = T$. $\square$

Structure complexe sur $K \times_T V$

K : compact, T : tore maximal, G : complexification de K, $\xi \in \widehat{T}$.

On prolonge ξ à B :

$$\xi_{\mathbb{C}}(tan) := \xi(t)e^{i\mathrm{d}\xi(\log a)}.$$

Proposition

On a $\xi_{\mathbb{C}} \in \widehat{B}$ et $G \times_B \mathbb{C}_{\xi_{\mathbb{C}}} \simeq K \times_T \mathbb{C}_{\xi}$.

Démonstration : L'isomorphisme $\Phi : K \times_T \mathbb{C}_{\xi} \to G \times_B \mathbb{C}_{\xi_{\mathbb{C}}}$ est donné par

$$\Phi(k, v) = (k, v).$$

Il est :

- bien défini car $T \subset B$,
- surjectif car $G = KB$,
- injectif car $K \cap B = T$. $\square$

En particulier, $K \times_T \mathbb{C}_{\xi} \to K/T$ est un fibré holomorphe.

L'identification $T_{eT}(K/T) = \mathfrak{k}/\mathfrak{t}$ induit $T(K/T) = K \times_T \mathfrak{k}/\mathfrak{t}$ et donc

$$\begin{aligned} T(K/T)_{\mathbb{C}} &= (K \times_T \mathfrak{k}/\mathfrak{t})_{\mathbb{C}} = K \times_T (\mathfrak{k}/\mathfrak{t})_{\mathbb{C}} \\ &= K \times_T \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = K \times_T (\mathfrak{n} \oplus \overline{\mathfrak{n}}) \\ &= (K \times_T \mathfrak{n}) \oplus (K \times_T \overline{\mathfrak{n}}). \end{aligned}$$

L'identification $T_{eT}(K/T) = \mathfrak{k}/\mathfrak{t}$ induit $T(K/T) = K \times_T \mathfrak{k}/\mathfrak{t}$ et donc

$$\begin{aligned} T(K/T)_{\mathbb{C}} &= (K \times_T \mathfrak{k}/\mathfrak{t})_{\mathbb{C}} = K \times_T (\mathfrak{k}/\mathfrak{t})_{\mathbb{C}} \\ &= K \times_T \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = K \times_T (\mathfrak{n} \oplus \overline{\mathfrak{n}}) \\ &= (K \times_T \mathfrak{n}) \oplus (K \times_T \overline{\mathfrak{n}}). \end{aligned}$$

Proposition

On a

$$T^{1,0}K/T = K \times_T \overline{\mathfrak{n}}, \qquad T^{0,1}K/T = K \times_T \mathfrak{n}.$$

L'identification $T_{eT}(K/T) = \mathfrak{k}/\mathfrak{t}$ induit $T(K/T) = K \times_T \mathfrak{k}/\mathfrak{t}$ et donc

$$\begin{aligned} T(K/T)_{\mathbb{C}} &= (K \times_T \mathfrak{k}/\mathfrak{t})_{\mathbb{C}} = K \times_T (\mathfrak{k}/\mathfrak{t})_{\mathbb{C}} \\ &= K \times_T \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = K \times_T (\mathfrak{n} \oplus \overline{\mathfrak{n}}) \\ &= (K \times_T \mathfrak{n}) \oplus (K \times_T \overline{\mathfrak{n}}). \end{aligned}$$

Proposition

On a

$$T^{1,0}K/T = K \times_T \overline{\mathfrak{n}}, \qquad T^{0,1}K/T = K \times_T \mathfrak{n}.$$

Corollaire

Si $\xi \in \widehat{T}$ *et* $s \in \Gamma(K/T, K \times_T \mathbb{C}_\xi)$ *correspond à* $f \in \mathrm{ind}_T^K \xi$ *et* $F \in \mathrm{ind}_B^G \xi_{\mathbb{C}}$, *on a*

$$s \text{ est holomorphe} \iff F \text{ est holomorphe} \iff \forall Z \in \mathfrak{n},\ Zf = 0.$$

Sommaire

Quelques rappels :

Quelques rappels :

Théorème (Semi-simplicité)

Si (π, V) *est une représentation groupe compact* K*, alors*

$V_{K\text{-}\mathit{fin}}$ *est dense dans* V*,* $V_{K\text{-}\mathit{fin}}$ *est semi-simple.*

Quelques rappels :

Théorème (Semi-simplicité)

Si (π, V) est une représentation groupe compact K, alors

$$V_{K\text{-fin}} \text{ est dense dans } V, \qquad V_{K\text{-fin}} \text{ est semi-simple.}$$

Théorème (de Peter-Weyl)

Si K est un groupe compact alors en tant que $(K \times K)$-module, on a

$$C(K, \mathbb{C})_{K\text{-fin}} = C^\infty(K, \mathbb{C})_{K\text{-fin}} = \bigoplus_{V \in \widehat{K}} V \otimes V^*.$$

Quelques rappels :

Théorème (Semi-simplicité)

Si (π, V) est une représentation groupe compact K, alors

$$V_{K\text{-fin}} \text{ est dense dans } V, \qquad V_{K\text{-fin}} \text{ est semi-simple.}$$

Théorème (de Peter-Weyl)

Si K est un groupe compact alors en tant que $(K \times K)$-module, on a

$$C(K, \mathbb{C})_{K\text{-fin}} = C^{\infty}(K, \mathbb{C})_{K\text{-fin}} = \bigoplus_{V \in \widehat{K}} V \otimes V^*.$$

Théorème (du plus haut poids)

Si K est un groupe de Lie compact connexe, on a

$$\widehat{K} = \{V(\lambda) \mid \lambda \in A(T)^+\}.$$

Proposition

Le groupe de Weyl $W(K,T)$ agit transitivement sur les chambres de Weyl.

Proposition

Le groupe de Weyl $W(K,T)$ agit transitivement sur les chambres de Weyl.

En particulier, il existe $w_0 \in W(K,T)$ qui envoie la chambre fondamentale sur son opposée.

Proposition

Le groupe de Weyl $W(K,T)$ agit transitivement sur les chambres de Weyl.

En particulier, il existe $w_0 \in W(K,T)$ qui envoie la chambre fondamentale sur son opposée.

Lemme

Si $\lambda \in A(T)^+$, on a $V(\lambda)^* \simeq V(-w_0 \cdot \lambda)$.

Proposition

Le groupe de Weyl $W(K,T)$ agit transitivement sur les chambres de Weyl.

En particulier, il existe $w_0 \in W(K,T)$ qui envoie la chambre fondamentale sur son opposée.

Lemme

Si $\lambda \in A(T)^+$, on a $V(\lambda)^* \simeq V(-w_0 \cdot \lambda)$.

Théorème (de Borel-Weil)

Si K est un groupe de Lie compact connexe et $\lambda \in A(T)$, on a

$$\Gamma_{\mathrm{hol}}(K/T, K \times_T \mathbb{C}_{\xi_\lambda}) \simeq \begin{cases} V(w_0 \cdot \lambda) \text{ si } -\lambda \text{ est dominant,} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Théorème (de Borel-Weil)

Si $\lambda \in A(T)$, on a $\Gamma_{\mathrm{hol}}(K/T, K \times_T \mathbb{C}_{\xi_\lambda}) \simeq \begin{cases} V(w_0 \cdot \lambda) \text{ si } -\lambda \text{ est dominant,} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

Démonstration :

Théorème (de Borel-Weil)

Si $\lambda \in A(T)$, on a $\Gamma_{\mathrm{hol}}(K/T, K \times_T \mathbb{C}_{\xi_\lambda}) \simeq \begin{cases} V(w_0 \cdot \lambda) \text{ si } -\lambda \text{ est dominant,} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

<u>Démonstration</u> : On a

$$\Gamma_{\mathrm{hol}}(K/T, K \times_T \mathbb{C}_{\xi_\lambda}) \simeq \left\{ f : K \to \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} \forall k \in K, \forall t \in T, \ f(kt) = \xi_\lambda(t)^{-1} f(k) \\ \forall Y \in \mathfrak{n}, \mathrm{d}R(Y) f = 0 \end{array} \right\}$$

Théorème (de Borel-Weil)

Si $\lambda \in A(T)$, *on a* $\Gamma_{\mathrm{hol}}(K/T, K \times_T \mathbb{C}_{\xi_\lambda}) \simeq \begin{cases} V(w_0 \cdot \lambda) \text{ si } -\lambda \text{ est dominant,} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

Démonstration : On a

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathrm{hol}}(K/T, K \times_T \mathbb{C}_{\xi_\lambda}) &\simeq \left\{ f : K \to \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} \forall k \in K, \forall t \in T,\ f(kt) = \xi_\lambda(t)^{-1} f(k) \\ \forall Y \in \mathfrak{n}, \mathrm{d}R(Y) f = 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ f : K \to \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} \forall H \in \mathfrak{h},\ \mathrm{d}R(H) f = -\lambda(H) f \\ \forall Y \in \mathfrak{n}, \mathrm{d}R(Y) f = 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Théorème (de Borel-Weil)

Si $\lambda \in A(T)$, on a $\Gamma_{\mathrm{hol}}(K/T, K \times_T \mathbb{C}_{\xi_\lambda}) \simeq \begin{cases} V(w_0 \cdot \lambda) \text{ si } -\lambda \text{ est dominant,} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

<u>Démonstration</u> : On a

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mathrm{hol}}(K/T, K \times_T \mathbb{C}_{\xi_\lambda}) &\simeq \left\{ f : K \to \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} \forall k \in K, \forall t \in T, \ f(kt) = \xi_\lambda(t)^{-1} f(k) \\ \forall Y \in \mathfrak{n}, \mathrm{d}R(Y) f = 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ f : K \to \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} \forall H \in \mathfrak{h}, \ \mathrm{d}R(H) f = -\lambda(H) f \\ \forall Y \in \mathfrak{n}, \mathrm{d}R(Y) f = 0 \end{array} \right\}\end{aligned}$$

donc

Théorème (de Borel-Weil)

Si $\lambda \in A(T)$, *on a* $\Gamma_{\mathrm{hol}}(K/T, K \times_T \mathbb{C}_{\xi_\lambda}) \simeq \begin{cases} V(w_0 \cdot \lambda) \text{ si } -\lambda \text{ est dominant,} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

<u>Démonstration</u> : On a

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mathrm{hol}}(K/T, K \times_T \mathbb{C}_{\xi_\lambda}) &\simeq \left\{ f : K \to \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} \forall k \in K, \forall t \in T,\ f(kt) = \xi_\lambda(t)^{-1} f(k) \\ \forall Y \in \mathfrak{n}, \mathrm{d}R(Y) f = 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ f : K \to \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} \forall H \in \mathfrak{h},\ \mathrm{d}R(H) f = -\lambda(H) f \\ \forall Y \in \mathfrak{n}, \mathrm{d}R(Y) f = 0 \end{array} \right\}\end{aligned}$$

donc

$$\Gamma_{\mathrm{hol}}(K/T, K \times_T \mathbb{C}_{\xi_\lambda})_{K\text{-fin}} \simeq \bigoplus_{\mu \in A(T)^+} V(\mu) \otimes \left\{ \varphi \in V(\mu)^* \mid \varphi \begin{array}{c} \text{est vecteur de plus} \\ \text{haut poids } -\lambda \end{array} \right\}$$

Théorème (de Borel-Weil)

Si $\lambda \in A(T)$, *on a* $\Gamma_{\mathrm{hol}}(K/T, K \times_T \mathbb{C}_{\xi_\lambda}) \simeq \begin{cases} V(w_0 \cdot \lambda) \text{ si } -\lambda \text{ est dominant,} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

<u>Démonstration</u> : On a

$$\Gamma_{\mathrm{hol}}(K/T, K \times_T \mathbb{C}_{\xi_\lambda}) \simeq \left\{ f : K \to \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} \forall k \in K, \forall t \in T,\ f(kt) = \xi_\lambda(t)^{-1} f(k) \\ \forall Y \in \mathfrak{n}, \mathrm{d}R(Y) f = 0 \end{array} \right\}$$
$$= \left\{ f : K \to \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} \forall H \in \mathfrak{h},\ \mathrm{d}R(H) f = -\lambda(H) f \\ \forall Y \in \mathfrak{n}, \mathrm{d}R(Y) f = 0 \end{array} \right\}$$

donc

$$\Gamma_{\mathrm{hol}}(K/T, K \times_T \mathbb{C}_{\xi_\lambda})_{K\text{-fin}} \simeq \bigoplus_{\mu \in A(T)^+} V(\mu) \otimes \left\{ \varphi \in V(\mu)^* \mid \varphi \begin{array}{c} \text{est vecteur de plus} \\ \text{haut poids } -\lambda \end{array} \right\}$$
$$\simeq \begin{cases} V(w_0 \cdot \lambda) \text{ si } -\lambda \text{ est dominant,} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Théorème (de Borel-Weil)

Si $\lambda \in A(T)$*, on a* $\Gamma_{\mathrm{hol}}(K/T, K \times_T \mathbb{C}_{\xi_\lambda}) \simeq \begin{cases} V(w_0 \cdot \lambda) \text{ si } -\lambda \text{ est dominant,} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

<u>Démonstration</u> : On a

$$\Gamma_{\mathrm{hol}}(K/T, K \times_T \mathbb{C}_{\xi_\lambda}) \simeq \left\{ f : K \to \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} \forall k \in K, \forall t \in T,\ f(kt) = \xi_\lambda(t)^{-1} f(k) \\ \forall Y \in \mathfrak{n}, \mathrm{d}R(Y) f = 0 \end{array} \right\}$$
$$= \left\{ f : K \to \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} \forall H \in \mathfrak{h},\ \mathrm{d}R(H) f = -\lambda(H) f \\ \forall Y \in \mathfrak{n}, \mathrm{d}R(Y) f = 0 \end{array} \right\}$$

donc

$$\Gamma_{\mathrm{hol}}(K/T, K \times_T \mathbb{C}_{\xi_\lambda})_{K\text{-fin}} \simeq \bigoplus_{\mu \in A(T)^+} V(\mu) \otimes \left\{ \varphi \in V(\mu)^* \mid \varphi \begin{array}{c} \text{est vecteur de plus} \\ \text{haut poids } -\lambda \end{array} \right\}$$
$$\simeq \begin{cases} V(w_0 \cdot \lambda) \text{ si } -\lambda \text{ est dominant,} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Comme $\Gamma_{\mathrm{hol}}(K/T, K \times_T \mathbb{C}_{\xi_\lambda})_{K\text{-fin}}$ est de dimension finie, le résultat suit.

Et si K n'est pas connexe ?

Et si K n'est pas connexe ?

Trois corrections :

Et si K n'est pas connexe ?

Trois corrections :

- On remplace T par le grand sous-groupe de Cartan $Z_K(\mathfrak{t})$,

Et si K n'est pas connexe ?

Trois corrections :

- On remplace T par le grand sous-groupe de Cartan $Z_K(\mathfrak{t})$,
- On remplace $A(T)^+$ par $\widehat{Z_K(\mathfrak{t})}^+$.

Et si K n'est pas connexe ?

Trois corrections :

- On remplace T par le grand sous-groupe de Cartan $Z_K(\mathfrak{t})$,
- On remplace $A(T)^+$ par $\widehat{Z_K(\mathfrak{t})}^+$.
- On remplace B par un sous-groupe parabolique de G de facteur de Levi $Z_K(\mathfrak{t})$.

Et si K n'est pas connexe ?

Trois corrections :

- On remplace T par le grand sous-groupe de Cartan $Z_K(\mathfrak{t})$,
- On remplace $A(T)^+$ par $\widehat{Z_K(\mathfrak{t})}^+$.
- On remplace B par un sous-groupe parabolique de G de facteur de Levi $Z_K(\mathfrak{t})$.

Il faut alors utiliser une approche "à la Yoneda" avec la réciprocité de Frobenius.

Sommaire

L'exemple fondamental

L'exemple fondamental

$$K = \mathrm{SU}(2), \quad T \text{ : tore usuel}, \quad P = \tfrac{1}{2}\mathbb{Z}\epsilon_{12}, \ \ R = \mathbb{Z}\epsilon_{12}, \ \ \Delta = \{\epsilon_{12}\},$$
$$G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}), \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \right\}.$$

L'exemple fondamental

$$K = \mathrm{SU}(2), \quad T \text{ : tore usuel}, \quad P = \tfrac{1}{2}\mathbb{Z}\epsilon_{12}, \; R = \mathbb{Z}\epsilon_{12}, \; \Delta = \{\epsilon_{12}\},$$
$$G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}), \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \right\}.$$

Pour $F \in \mathrm{ind}_B^G(-\frac{n}{2}\epsilon_{12}) \cap \mathcal{H}(G)$, on pose

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (z_1, z_2) & \mapsto & F\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ z_2 & \frac{1}{z_1} \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} z_1 & -\frac{1}{z_2} \\ z_2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

L'exemple fondamental

$$K = \mathrm{SU}(2), \quad T \text{ : tore usuel}, \quad P = \tfrac{1}{2}\mathbb{Z}\epsilon_{12}, \;\; R = \mathbb{Z}\epsilon_{12}, \;\; \Delta = \{\epsilon_{12}\},$$
$$G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}), \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \right\}.$$

Pour $F \in \mathrm{ind}_B^G(-\frac{n}{2}\epsilon_{12}) \cap \mathcal{H}(G)$, on pose

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (z_1, z_2) & \mapsto & F\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ z_2 & \frac{1}{z_1} \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} z_1 & -\frac{1}{z_2} \\ z_2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Alors, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^2)$ et on a

$$f(\lambda z_1, \lambda z_2) = F\begin{pmatrix} \lambda z_1 & 0 \\ \lambda z_2 & \lambda^{-1} z_1^{-1} \end{pmatrix} = F\left(\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ z_2 & z_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \right) = \lambda^n f(z_1, z_2)$$

L'exemple fondamental

$$K = \mathrm{SU}(2), \quad T : \text{tore usuel}, \quad P = \tfrac{1}{2}\mathbb{Z}\epsilon_{12}, \;\; R = \mathbb{Z}\epsilon_{12}, \;\; \Delta = \{\epsilon_{12}\},$$
$$G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}), \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \right\}.$$

Pour $F \in \mathrm{ind}_B^G(-\frac{n}{2}\epsilon_{12}) \cap \mathcal{H}(G)$, on pose

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (z_1, z_2) & \mapsto & F\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ z_2 & \frac{1}{z_1} \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} z_1 & -\frac{1}{z_2} \\ z_2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Alors, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^2)$ et on a

$$f(\lambda z_1, \lambda z_2) = F\begin{pmatrix} \lambda z_1 & 0 \\ \lambda z_2 & \lambda^{-1} z_1^{-1} \end{pmatrix} = F\left(\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ z_2 & z_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \right) = \lambda^n f(z_1, z_2)$$

donc $\mathrm{ind}_B^G(-\frac{n}{2}\epsilon_{12}) \cap \mathcal{H}(G) \simeq \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^2)$.

L'exemple fondamental

$$K = \mathrm{SU}(2), \quad T \text{ : tore usuel}, \quad P = \tfrac{1}{2}\mathbb{Z}\epsilon_{12}, \ \ R = \mathbb{Z}\epsilon_{12}, \ \ \Delta = \{\epsilon_{12}\},$$
$$G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}), \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \right\}.$$

Pour $F \in \mathrm{ind}_B^G(-\frac{n}{2}\epsilon_{12}) \cap \mathcal{H}(G)$, on pose

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (z_1, z_2) & \mapsto & F\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ z_2 & \frac{1}{z_1} \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} z_1 & -\frac{1}{z_2} \\ z_2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Alors, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^2)$ et on a

$$f(\lambda z_1, \lambda z_2) = F\begin{pmatrix} \lambda z_1 & 0 \\ \lambda z_2 & \lambda^{-1} z_1^{-1} \end{pmatrix} = F\left(\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ z_2 & z_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \right) = \lambda^n f(z_1, z_2)$$

donc $\mathrm{ind}_B^G(-\frac{n}{2}\epsilon_{12}) \cap \mathcal{H}(G) \simeq \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^2)$.

Interprétation géométrique : On a $G/B \simeq \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ et $G \times_B \mathbb{C}_{-\frac{n}{2}\epsilon_{12}} \simeq \mathcal{O}(n)$.