Leçon 159

Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

$\mathbb{K}$ désigne un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1 Base duale, bidualité

Définition 1 (ROM p.441)**.** On note $E^* = L(E,\mathbb{K})$ l'espace dual de E. Les éléments de E^* sont appelés "formes linéaires".

Exemple 2 (ROM p.441)**.**

- Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E et $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K}$, l'application $x_1e_1+\dots+x_ne_n \mapsto a_1x_1+\dots+a_nx_n$ est une forme linéaire sur E.
- Si $\alpha \in \mathbb{K}$, l'application $P \mapsto P(\alpha)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}_n[X]$.
- L'application Tr est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$.

Proposition 3. Tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle. De plus, deux formes linéaires non nulles sur E ont le même noyau si et seulement si elles sont proportionnelles.

Corollaire 4. Si $\mathbb{K}$ est un corps fini de cardinal q, il y a $\frac{q^n-1}{q-1}$ hyperplans distincts dans $\mathbb{K}^n$.

Exemple 5. Si H est l'hyperplan de $\mathbb{K}^n$ donné par l'équation $a_1x_1+\dots+a_nx_n$ dans la base canonique alors $H = \ker\varphi$ où $\varphi(x_1,\dots,x_n) = a_1x_1+\dots+a_nx_n$.
Similairement, si $(v_1,\dots,v_{n-1}$ est une base de H, $H = \ker\psi$ où $\psi : v \mapsto \det(v_1,\dots,v_{n-1},v)$.

Proposition 6 (Développement 1, CAL1 p.5)**.** Cas $E = M_n(\mathbb{K})$: pour tout $\phi \in E^*$, il existe un unique $A \in M_n(\mathbb{K})$ tel que $\phi = [M \mapsto \mathrm{Tr}(AM)]$.

Application 7 (Développement 1, SZP)**.** L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ est la boule unité de $M_n(\mathbb{R})$ pour la norme subordonnée à la norme 2.

Application 8 (CAL1 p.5)**.**

- Tout hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.
- Tout hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$ contient une matrice orthogonale.

Théorème 9 (ROM p.442 − 443)**.** Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. La famille $(e_1^*,\dots e_n^*)$ de E^* définie par $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ est une base de E^*.
Réciproquement, si $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ est une base de E^*, il existe une base $(v_1,\dots,v_n)$ de E telle que $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ soit la base duale de $(v_1,\dots,v_n)$.

Corollaire 10 (ROM p.442)**.** On a $\dim E^* = \dim E$.

Définition 11 (ROM p.444)**.** Les bases $(e_1^*,\dots,e_n^*)$ et $(v_1,\dots,v_n)$ de E^* et E du lemme précédent sont appelées bases duale et antéduale de $(e_1,\dots,e_n)$ et $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$.

Lemme 12 (CAL1 p.4)**.** Si $|\mathbb{K}| \geqslant n+1$ et si $x_0,\dots,x_n \in \mathbb{K}$ sont deux-à-deux distincts, les applications $([P \mapsto P(x_k)])_{0\leqslant k\leqslant n}$ forment une base de $\mathbb{K}_n[X]^*$.

Application 13 (CAL1 p.4)**.** Soient $x_0,\dots,x_n \in \mathbb{K}$ deux-à-deux distincts et $y_0,\dots,y_n \in \mathbb{K}$. Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ vérifiant $P(x_i) = y_i$ pour $i = 0,\dots,n$.

Proposition 14 (ROM p.442)**.** Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, on a

$$\forall v \in E, \quad v = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(v)e_i.$$

Si $\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ est une base de E et $(v_1,\dots,v_n)$ est sa base antéduale, on a

$$\forall f \in E^*, \quad f = \sum_{i=1}^{n} f(v_i)\varphi_i.$$

Application 15 (Formule de Taylor polynomiale, ROM p.442)**.** Si car$\mathbb{K} = 0$, on a

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

Proposition 16 (ROM p.452)**.** Soient B, C deux bases de E et B^*, C^* les bases duales. On a $\mathrm{Pass}(B^*,C^*) = \mathrm{Pass}(C,B)^T$.

Définition 17 (ROM p.445)**.** Le bidual de E est l'espace dual de E^*, c'est-à-dire E^{**}.

Théorème 18 (ROM p.445)**.** L'application $\mathrm{ev} : \begin{array}{ccc} E & \to & E^{**} \\ x & \mapsto & \mathrm{ev}_x : [\varphi \mapsto \varphi(x)] \end{array}$ est un isomorphisme.

2 Orthogonalité

Définition 19 (ROM p.447)**.** Si X est une partie de E, on note $X^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in X, \varphi(x) = 0\}$.
Si Y est une partie de E^*, on note $Y^\circ = \{x \in E \mid \forall \varphi \in Y, \varphi(x) = 0\}$.

Théorème 20 (ROM p.447)**.** Soient A, B des parties non vides de E et U, V des parties non vides de E^*.

1. Si $A \subset B$, $B^\perp \subset A^\perp$ et si $U \subset V$, $U^\perp \subset V^\perp$.
2. $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$ et $U^\circ = \mathrm{Vect}(U)^\circ$.
3. $(A^\perp)^\circ = \mathrm{Vect}(A)$ et $(U^\circ)^\perp = \mathrm{Vect}(U)$.
4. $\{0_E\}^\perp = E^*$, $E^\perp = \{0_{E^*}\}$, $\{0_{E^*}\} = E$ et $E^\perp = \{0_{E^*}\}$.
5. $X^\perp = \mathrm{ev}(X)^\circ$.

Théorème 21 (ROM p.448)**.** Soit F, F' des sous-espaces de E et G, G' des sous-espaces de E^*. On a

1. $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$.
2. $\dim G + \dim G^\circ = \dim E$.

3. $(F+F')^\perp = F^\perp \cap F'^\perp$.
4. $(F\cap F')^\perp = F^\perp + F'^\perp$.
5. $(G+G')^\circ = G^\circ \cap G'^\circ$.
6. $(G\cap G')^\circ = G^\circ + G'^\circ$.

Application 22 (GOU *p*.134)**.** Si $\varphi_1,\dots,\varphi_p$ sont p forme linéaires linéairement indépendantes, $\{x\in E \mid \forall i, \varphi_i(x)=0\}$ est de dimension p.
Réciproquement, si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension q, il existe $n-q$ formes linéaires linéairement indépendantes $\varphi_1,\dots,\varphi_{n-q}$ telles que $F=\{x\in E \mid \forall i, \varphi_i(x)=0\}$.

Application 23. Si $H_1,\dots,H_r$ sont des hyperplans de E, on a $\dim \bigcap_{i=1}^r H_r \geqslant n-r$.

Application 24. Soit $\varphi : E\times F \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire et G un sous-espace vectoriel de E. On a $\dim G + \dim G^{\perp_\varphi} = \dim F + \dim(G\cap F^{\perp_\varphi})$.

3 Transposée d'un endomorphisme

Définition 25 (ROM *p*.452)**.** Soit $f\in L(E,F)$. On définit $f^T\in L(F^*,E^*)$ par

$$\forall u\in F^*,\quad f^T(u)=u\circ f.$$

Proposition 26 (ROM *p*.452)**.** L'application $f\mapsto f^T$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Théorème 27 (ROM *p*.452)**.** Soient $f\in L(E,F)$, $g\in L(F,G)$. On a

1. $(g\circ f)^T = f^T\circ g^T$.
2. Si f est un isomorphisme alors f^T aussi et $(f^T)^{-1}=(f^{-1})^T$.
3. $\ker(f^T)=\mathrm{Im}(f)^\perp$ et $\mathrm{Im}(f^T)=\ker(f)^\perp$.
4. Si $\dim E=\dim F$, f et f^T ont même rang.
5. ${f^T}^T = \mathrm{ev}\circ f\circ \mathrm{ev}^{-1}$ si $E=F$.
6. $M_{B^*,C^*}(f^T)=M_{C,B}(f)^T$ si B et C sont des bases de E et F.

Application 28 (CAL1 *p*.9)**.** Si $\mathbb{K}$ est un corps fini de cardinal q et $m>n$ il y a autant d'applications linéaires injectives de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^m$ que d'applications linéaires surjectives de $\mathbb{K}^m$ dans $\mathbb{K}^n$. Ce nombre est

$$\frac{|GL_m(\mathbb{K})|}{q^{n(m-n)}|GL_{m-n}(\mathbb{K})|}.$$

Proposition 29. Si $f\in L(E)$ et $F\subset E$, f stabilise F si et seulement si f^T stabilise $F^\perp$.

4 Applications

4.1 Application aux espaces euclidiens

On suppose que $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace euclidien.

Théorème 30 (ROM)**.** L'application $a\mapsto\langle\cdot,a\rangle$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre E et E^*.

Corollaire 31 (ROM)**.** Les résultats des Théorèmes 20 et 21 sont vrais en remplacant E^* par E et l'orthogonal au sens de la dualité par l'orthogonal au sens de la structure euclidienne.

Théorème 32 (ROM)**.** Pour tout $f\in L(E)$, il existe un unique $f^*\in L(E)$ appelé "adjoint de f" vérifiant

$$\forall x,y\in E,\quad \langle f(x),y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle.$$

Corollaire 33 (ROM)**.** Les résultats du Théorème 27 sont en remplacant E^* par E, la transposée par l'adjoint et l'orthogonale au sens de la dualité par l'orthogonal au sens de la structure euclidienne.

4.2 Application à la réduction

Lemme 34 (Développement 2, ROM *p*679)**.** Soit $u\in L(E)$ nilpotent d'indice q. Pour tout vecteur $x\in E$ tel que $u^{q-1}(x)\neq 0$, la famille $B=(x,u(x),\dots,u^{q-1}(x))$ est libre et $\mathrm{Vect}(B)$ est stable par u.

Lemme 35 (Développement 2, ROM *p*680)**.** Soit $u\in L(E)$ nilpotent d'indice q. Il existe $\varphi\in E^*$ et $x\in E$ tels que $\mathrm{Vect}(x,u(x),\dots,u^{q-1}(x))$ et $\mathrm{Vect}(\varphi,u^T(\varphi),\dots,(u^T)^{q-1}(\varphi))^\circ$ soient supplémentaires dans E et stable par u.

Théorème 36 (Réduction de Jordan, Développement 2, ROM *p*680)**.** Tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé admet une forme réduite de Jordan.

4.3 Application en calcul différentiel

Remarque 37 (ROU)**.** Si $f:E\to\mathbb{R}$ est différentiable en a, sa différentielle au point a est une forme linéaire.

Lemme 38 (ROU)**.** Soient E,F,G trois espaces vectoriels, $u:E\to F$ et $v:E\to G$. On a $\ker u\subset\ker v$ si et seulement si il existe une application linéaire $w:F\to G$ telle que $v=w\circ u$.

Théorème 39 (ROU)**.** Soient $f,g_1,\dots,g_p$ des fonctions réelles de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, et X l'ensemble défini par les équations

$$g_1(x)=\cdots=g_p(x)=0,\quad x\in U.$$

Si la restriction de f à X admet un extremum local en $a\in X$, et si les différentielles $\mathrm{d}g_1(a),\dots,\mathrm{d}g_p(a)$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}^n$, alors les formes linéaires $\mathrm{d}f(a),\mathrm{d}g_1(a),\dots,\mathrm{d}g_p(a)$ sont liées.

4.4 Application à l'analyse numérique

Application 40 (Méthode de Simpson, CAL2 *p.*261)**.** Si $a, b \in \mathbb{R}$ vérifient $a < b$, il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\int_a^b P(x)\mathrm{d}x = \alpha P(a) + \beta P\left(\frac{a+b}{2}\right) + \gamma P(b)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

Théorème 41 (Quadrature de Gauss, CAL2 *p.*273)**.**
On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x$. Soit $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ la base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ obtenue à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à partir de $(1, X, \ldots, X^n)$. Le polynôme P_n admet n racines distinctes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dans $]-1, 1[$. De plus, si $L_1, \ldots, L_n$ désigne les polynômes de Lagrange associés aux points $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et si on pose $\lambda_i = \int_{-1}^1 L_i(x)\mathrm{d}x$ pour $i = 1, \ldots, n$ alors

$$\int_{-1}^1 P(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(\alpha_i)$$

pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

Références

[CAL1] : P. Caldero - Carnet de voyage en Algébrie.
[CAL2] : P. Caldero - Carnet de voyage en Analystan.
[ROM] : J-E. Rombaldi - Mathématiques pour l'agrégation, algèbre et géométrie.
[ROU] : J-F. Rouvière - Le petit guide du calcul différentiel à l'usage de la licence.
[SZP] : A. Szpirglas - Mathématiques Algèbre L3.

Développements

[Développement 1] : Proposition 6 et Application 7.
[Développement 2] : Lemme 34, Lemme 35 et Théorème 36.

Développement 1

Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$

1 Soit $f \in M_n(\mathbb{K})^*$ une forme linéaire. Procédons par analyse synthèse.
Analyse : Supposons qu'il existe $A = (a_{ij})_{ij} \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $f(M) = \mathrm{Tr}(AM)$ pour tout $M \in M_n(\mathbb{K})$. Si E_{ij} est la base usuelle de $M_n(\mathbb{K})$, on a donc

$$\begin{aligned} f(E_{ij}) &= \mathrm{Tr}(AE_{ij}) \\ &= \sum_{kl} a_{kl}\,\mathrm{Tr}(E_{kl}E_{ij}) = \sum_{kl} a_{kl}\,\mathrm{Tr}(E_{ij}E_{kl}) \\ &= a_{ji} \end{aligned}$$

d'où l'unicité de A.
Synthèse : Posons $A = (f(E_{ji})_{ij} \in M_n(\mathbb{K})$. Pour tout $M = (m_ij)_{ij} \in M_n(\mathbb{K})$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(AM) &= \sum_i (AM)_{ii} \\ &= \sum_{ij} f(E_{ji}) mji \\ &= f\left(\sum_{ij} mjiE_{ji}\right) \\ &= f(M) \end{aligned}$$

d'où l'existence de A.

2 On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Notons B la boule unité de $M_n(\mathbb{R})$) et K l'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$. Pour tout $M \in O_n(\mathbb{R})$, on a

$$\|M\| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|Mx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1.$$

Ainsi, B est convexe et contient $O_n(\mathbb{R})$ donc elle contient K.
Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $M \in B\backslash K$. D'après le théorème de Carathéodory, l'application

$$\begin{array}{ccc} O_n(\mathbb{R})^{p+1} \times \Delta & \to & K \\ (A_1, \ldots, A_{p+1}, t_1, \ldots, t_{p+1}) & \mapsto & \sum_{i=1}^{p+1} t_i A_i \end{array}$$

où $\Delta = \{(t_1, \ldots, t_{p+1} \in \mathbb{R}_+^{p+1} \mid t_1 + \cdots + t_{p+1} = 1\}$ est surjective donc K est l'image continue d'un compact : c'est un compact. En particulier, on peut séparer strictement $\{M\}$ et K par un hyperplan affine H. D'après le lemme 6, il existe donc $A \in M_n(\mathbb{R})$ non nulle et $s \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $B \in K$, $\mathrm{Tr}(AB) < s < \mathrm{Tr}(AM)$. En particulier, on a

$$\sup_{B\in K} \mathrm{Tr}(AB) < \mathrm{Tr}(AM).$$

Posons $A = OS$ la décomposition polaire de A et fixons $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ une base orthonormée qui diagonalise S. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(AM) &= \mathrm{Tr}(MA) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle MAe_i, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle Ae_i, M^* e_i\rangle \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \|Ae_i\| \|M^* e_i\| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \|OSe_i\| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \|Se_i\| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle Se_i, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle O^{-1}Ae_i, e_i\rangle \\
&= \mathrm{Tr}(AO^{-1})
\end{aligned}$$

ce qui est absurde puisque $O^{-1} \in O_n(\mathbb{R}) \subset K$. Ainsi, M n'existe pas et $K = B$.

Développement 2

Réduction de Jordan

① Soit $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{q-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_i \lambda_i u^i(x) = 0$. En appliquant u^{q-1}, on obtient $\lambda_0 u^{q-1}(x) = 0$ et donc $\lambda_0 = 0$ puisque $u^{q-1}(x) \neq 0$. Supposons que l'on sache que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_i = 0$. Alors, en appliquant u^{q-i-2} à l'égalité, on obtient $\lambda_{i+1} u^{q-1}(x) = 0$ et donc $\lambda_{i+1} = 0$ puisque $u^{q-1}(x) \neq 0$.
Ainsi, par récurrence, on a $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{q-1} = 0$ et la famille est libre.
De plus, $\mathrm{Vect}(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x)) = \mathbb{K}[u](x)$ donc c'est bien un sous-espace vectoriel stable par u.

② u étant nilpotent d'indice q, u^T l'est aussi. Il existe donc $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi \circ u^{q-1} \neq 0$ et il existe également $x \in E$ tel que $\varphi \circ u^{q-1}(x) \neq 0$. En particulier, on a $u^{q-1}(x) \neq 0$ et le lemme précédent nous assure que si

$$F = \mathrm{Vect}(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x)) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}(\varphi, \varphi \circ u, \dots, \varphi \circ u^{q-1}),$$

F et G° sont stables par u et de plus, on a

$$\dim F + \dim G^\circ = q + n - q = n$$

donc il nous suffit de montrer que $F \cap G^\circ = \{0\}$.
Fixons donc $y = \sum_i \lambda_i u^i(x) \in F \cap G^\circ$. En appliquant $\varphi \circ u^{q-1}$, on obtient $\lambda_0 \varphi \circ u^{q-1}(x) = 0$ et donc $\lambda_0 = 0$ puisque $\varphi \circ u^{q-1}(x) \neq 0$. Supposons que l'on sache que $\lambda_0, \dots, \lambda_i = 0$. En appliquant $\varphi \circ u^{q-i+2}$, on obtient $\lambda_{i+1} \varphi \circ u^{q-1}(x) = 0$ et donc $\lambda_{i+1} = 0$ puisque $\varphi \circ u^{q-1}(x) \neq 0$. Ainsi, par récurrence, on a $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{q-1} = 0$ et $y = 0$.
Finalement, $F \cap G = \{0\}$ et $F \oplus G = E$.

③ On considère tout d'abord le cas où u est nilpotent.
Nous procédons par récurrence forte sur $n = \dim(E)$.

Initialisation : si $n = 1$, $u = 0$ et il n'y a rien à montrer.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie aux rangs $1, \dots, n$. Soit E un espace vectoriel de dimension $n+1$ et soit $u \in L(E)$ un ensemble nilpotent d'indice q. Si $q = n+1$, le premier lemme donne une base dans laquelle u est une matrice de Jordan. On suppose donc que $1 \leqslant q \leqslant n$. Considérons les sous-espaces F et G° du deuxième lemme. La matrice de $u_{|F}$ dans la base $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est J_q donc en complétant cette famille en une base de E via une base de G°, u s'écrit matriciellement sous la forme

$$\begin{pmatrix} J_q & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où $B \in M_{n+1-q}(\mathbb{K})$ est nilpotente. L'hypothèse de récurrence permet alors de conclure.
Conclusion : par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.
Considérons le cas général. D'après le lemme des noyaux appliqué à $\chi_u = \prod_k (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$, on a

$$E = \bigoplus_k \ker(u - \lambda_k \mathrm{id})^{\alpha_k}.$$

Ainsi, on peut appliquer ce qui précède aux endomorphismes $(u - \lambda_k \mathrm{id})_{|\ker(u-\lambda_k\mathrm{id})^{\alpha_k}}$ et concaténer les bases obtenues pour obtenir la forme réduite de Jordan voulue.