Leçon 215

Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, exemples et applications.

E, F, G désignent des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie.
En dimension finie, la topologie normique est indépendante de la norme donc les normes sur E, F, G sont quelconques. De plus, toute application linéaire est automatiquement continue.
L'espace $L(E, F)$ est muni de la norme subordonnée.
On fixe un ouvert $\Omega \subset E$ et $f : \Omega \to F$.

1 Différentiabilité

1.1 Propriétés élémentaires

Proposition 1. Si $f : I \to \mathbb{R}$, et $a \in \mathbb{R}$, f est dérivable en a si et seulement si f admet un DL d'ordre 1 en a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a), \text{ au voisinage de } a.$$

Définition 2 (POM *p.*261)**.** f est différentiable en $a \in \Omega$ si et seulement si il existe $L \in L(E, F)$ telle que

$$f(x) = f(a) + L(x-a) + o(x-a), \text{ au voisinage de } a.$$

f est différentiable sur Ω si f est différentiable en a pour tout $a \in \Omega$.

Remarque 3. $g(x) = o(x)$ signifie ici que que $\dfrac{g(x)}{\|x\|} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

Proposition 4 (POM *p.*261)**.** Si f est différentiable en a, L est unique, appelée différentielle de f en a et notée $\mathrm{d}_a f$.

Proposition 5 (POM *p.*262)**.** f différentiable en $a \implies f$ continue en a.

Définition 6 (POM *p.*262)**.** Si f est différentiable sur Ω, on pose $\mathrm{d}f : \Omega \to L(E, F), a \mapsto \mathrm{d}_a f$ la différentielle de f. Si de plus $\mathrm{d}f$ est continue, on dit que f est de classe C^1 sur Ω (noté $f \in C^1(\Omega)$).

Exemple 7 (POM *p.*262-263)**.**

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f est différentiable en $a \iff f$ est dérivable en a et alors $\mathrm{d}_a f(h) = h f'(a)$.
- Si f est constante, f est C^1 et $\mathrm{d}_a f = 0_{L(E,F)}$ pour tout $a \in \Omega$.
- Si f est linéaire, f est C^1 et $\mathrm{d}_a f = f$ pour tout $a \in \Omega$.
- Si $f : E \times F \to G$ est bilinéaire, f est C^1 et on a $\mathrm{d}_{(a,b)} f(h, k) = f(a, k) + f(h, b)$ pour tous $(a, b), (h, k) \in E \times F$.
- Si $E = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $\Omega = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $f(M) = M^{-1}$, $\mathrm{d}_A f(H) = -A^{-1} H A^{-1}$ pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et tout $H \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 8 (POM *p.*262)**.** Si f, g sont différentiables en a alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + \lambda g$ est différentiable en a et $\mathrm{d}_a(\lambda f + g) = \lambda \mathrm{d}_a f + \mathrm{d}_a g$.

Théorème 9 (POM *p.*264)**.** Soient $\Omega \subset E$, $\Omega' \subset F$ ouverts, $f : \Omega \to F$, $g \in \Omega' \to G$ avec $f(\Omega) \subset \Omega'$, f différentiable en a et g différentiable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en a et $\mathrm{d}_a(f \circ g) = \mathrm{d}_{g(a)} f \circ \mathrm{d}_a g$.

Application 10. Une norme n'est pas différentiable en 0_E.

Proposition 11 (POM *p.*)**.** Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $g : \Omega \to \mathbb{R}$ sont différentiables en a alors fg est différentiable en a et $\mathrm{d}_a(fg) = f(a) d_a g + g(a) d_a f$.

1.2 Inégalité des accroissements finis

Théorème 12 (ROU *p.*104)**.** Supposons f différentiable et fixons $a, b \in \Omega$ tels que $[a, b] \subset \Omega$. S'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|\mathrm{d}_x f\|_{L(E,F)} \leqslant k$ pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leqslant k \|b - a\|_E.$$

Corollaire 13 (ROU *p.*105)**.** Supposons f est différentiable.

- Si Ω est convexe et s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|d_x f\|_{L(E,F)} \leqslant k$ pour tout $x \in \Omega$ alors f est k-lipschitzienne sur Ω.
- Si Ω est connexe et $\mathrm{d}_x f = 0_{L(E,F)}$ pour tout $x \in \Omega$ alors f est constante.

Application 14.

- Théorème 22.
- Si f est C^1 alors f est localement lipschitzienne.

1.3 Espaces produits

On suppose premièrement que $F = F_1 \times \cdots \times F_n$ où $F_1, \ldots, F_n$ sont des espaces vectoriels normés. F est donc muni de la structure d'espace vectoriel produit. On pose donc $f = (f_1, \ldots, f_n)$.

Théorème 15 (POM *p.*267)**.** f est différentiable en $a \in \Omega$ si et seulement si $f_1, \ldots, f_n$ le sont et on a alors $\mathrm{d}_a f = (\mathrm{d}_a f_1, \ldots, \mathrm{d}_a f_n)$.
En particulier, f est C^1 si et seulement si $f_1, \ldots, f_n$ le sont.

On suppose maintenant que $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ où $E_1, \ldots, E_n$ sont des espaces vectoriels normés. E est donc muni de la structure d'espace vectoriel produit.

Théorème 16 (POM *p.*267)**.** Si f est différentiable en $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E$ alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'application partielle $f_i : \begin{array}{ccc} E_i & \to & F \\ x & \mapsto & f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) \end{array}$ est différentiable en a_i et on a $\mathrm{d}_a f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}_{a_i} f_i$

1.4 Dérivées partielles

Définition 17 (GOU *p.*324)**.** Si $a \in \Omega$ et $v \in E$, on appelle dérivée directionnelle de f en a selon le vecteur v la quantité, si elle existe

$$L_a f(v) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

Proposition 18. Si f est différentiable en a, f admet des dérivées directionnelles en a selon tout vecteur et on a

$$L_a f(v) = \mathrm{d}_a f(v), \quad \forall v \in E.$$

Remarque 19. Il ne suffit pas d'admettre des dérivées directionnelles selon tout vecteur pour être différentiable : $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x}$ si $x \neq 0$, $f(0,y) = 0$ admet des dérivées directionnelles selon tout vecteur en $(0,0)$ mais n'est pas continue en $(0,0)$.

Jusqu'à la fin de cette sous-partie, on suppose que $E = \mathbb{R}^n$ que l'on munit de sa base canonique $(e_1, \dots, e_n)$.

Définition 20. Fixons $i \in [\![1,n]\!]$ et $a \in \Omega$. On dit que f admet une dérivée partielle en a d'indice i si f admet une dérivée directionnelle en a selon e_i. On note alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ la quantité $L_a f(e_i)$.

Proposition 21 (GOU *p.*325)**.** Si f est différentiable en $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}$ alors f admet des dérivées partielles en a et on a $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \mathrm{d}_a f(e_k)$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.
On a de plus la formule

$$d_a f(h) = \sum_{k=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_k}(a), \quad \forall h \in E.$$

Théorème 22 (GOU *p.*325)**.** Si toutes les dérivées partielles de f existent au voisinage de a et sont continues en a alors f est différentiable en a.

Corollaire 23. $f \in C^1(\Omega)$ si et seulement si les dérivées partielles de f existent et sont continues sur Ω.

Application 24 (GOU *p.*332-333)**.** L'application $\det : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est C^1 et $\mathrm{d}_A \det(H) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Com}(A)^T H)$.

Théorème 25 (GOU *p.*327)**.** Si f est différentiable en $a \in \Omega$, la matrice de $d_a f$ dans la base canonique est donnée par

$$J_a f = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

On l'appelle matrice jacobienne de f en a. Son déterminant est appelé jacobien de f en a.

Application 26 (GOU *p.*327)**.** La formule $\mathrm{d}_a(g \circ f) = \mathrm{d}_{f(a)} g \circ \mathrm{d}_a f$ se réécrit $J_a(g \circ f) = J_{f(a)} g J_a f$ et en identifiant les coefficients on trouve

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g_i}{\partial x_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a).$$

Application 27. Si $\varphi : U \to V$ est un C^1-difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, pour toute fonction intégrable $f : V \to \mathbb{C}$, on a

$$\int_V f(x) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \int_U f \circ \varphi(x) |\det(Jac_x(f))| \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

2 Différentielle seconde

On munit l'espace $B(E^2, F)$ des applications bilinéaires de E^2 vers F de la norme

$$\|b(x,y)\| = \sup_{\|x\|_E = \|y\|_E = 1} \|b(x,y)\|_F.$$

Théorème 28 (POM *p.*273)**.** Les applications

$$\Phi : \begin{array}{ccc} L(E, L(E,F)) & \to & B(E^2, F) \\ f & \mapsto & [(x,y) \mapsto f(x)(y)] \end{array} \quad \text{et} \quad \Psi : \begin{array}{ccc} B(E^2, F) & \to & L(E, L(E,F)) \\ b & \mapsto & [x \mapsto b(x, \cdot)] \end{array}$$

sont des isomorphismes isométriques.

Définition 29 (POM *p.*273)**.** f est deux fois différentiable en $a \in \Omega$ si f est différentiable au voisinage de a et si $\mathrm{d}f : x \mapsto \mathrm{d}_x f$ est différentiable en a. On pose $\mathrm{d}_a^2 f := \mathrm{d}_a(\mathrm{d}f)$.
f est deux fois différentiable sur Ω si f est deux fois différentiable en a pour tout $a \in \Omega$.
Si de plus $a \mapsto \mathrm{d}_a^2 f$ est continue, on dit que f est C^2 sur Ω.
Si f est deux fois différentiable en $a \in \Omega$, on identifie $\mathrm{d}_a^2 f$ avec l'application bilinéaire $(h,k) \mapsto \mathrm{d}_a^2 f(h,k) := \mathrm{d}_a(\mathrm{d}f)(h)(k)$.

Proposition 30 (POM *p.*274)**.** Une combinaison linéaire d'application deux fois différentiable l'est aussi. Si f est deux fois différentiable en a et si g est deux fois différentiable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est deux fois différentiable en a.

On se place maintenant dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $(e_1, \dots, e_n)$.

Définition 31. On définit les dérivées partielles de f par

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \quad \forall 1 \leqslant i \neq j \leqslant n.$$

Proposition 32 (POM *p.*274)**.** f est C^2 sur Ω alors f admet des dérivées partielles secondes continues sur Ω et on a alors

$$\mathrm{d}_a^2 f(h,k) = \sum_{i,j=1}^{n} h_i k_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a), \quad \forall a \in \Omega, \forall h,k \in \mathbb{R}^n.$$

Théorème 33 (POM *p.*275)**.** f est C^2 sur Ω si et seulement si f admet des dérivées partielles secondes continues sur Ω.

Théorème 34 (Schwarz, POM *p.*276)**.** Si f est de classe C^2 sur Ω alors pour tout $a \in \Omega$, $\mathrm{d}_a^2 f$ est une forme bilinéaire symétrique. En particulier, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \quad \forall 1 \leqslant i \neq j \leqslant n.$$

Application 35 (Développement 1, ROU *p.*307)**.** Si $X, H \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on a

$$\mathrm{d}_X \exp(H) = e^X \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\mathrm{ad}_X)^k(H)}{(k+1)!}$$

où $\mathrm{ad}_X : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \\ N & \mapsto & MN - NM \end{array}$.

Théorème 36 (Formule de Taylor, POM *p.*277)**.** Si f est C^2 au voisinage de a alors

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}_a f(h) + \int_0^1 (1-t)^2 \mathrm{d}^2_{a+th} f(h,h) \mathrm{d}t$$

et

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}_a f(h) + \frac{1}{2} \mathrm{d}^2_a f(h,h) + o\left(\|h\|^2\right).$$

3 Applications

3.1 Recherche d'extrema

Définition 37 (POM *p.*297)**.** On dit que $a \in \Omega$ est un point critique de f si $\mathrm{d}_a f = 0$.

Théorème 38 (POM *p.*297)**.** Si f est différentiable et si $a \in \Omega$ est un extremum local pour f alors a est un point critique de f.

Remarque 39 (POM *p.*298)**.** La réciproque est fausse : $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$.

Théorème 40 (POM *p.*298)**.** Supposons f de classe C^2.

(*i*) Si f admet un minimum local en $a \in \Omega$ alors $\mathrm{d}^2_a f$ est positive.

(*ii*) Si f admet un maximum local en $a \in \Omega$ alors $\mathrm{d}^2_a f$ est négative.

Réciproquement, si a est un point critique de f alors :

(*i*) Si $\mathrm{d}^2_a f$ est définie positive, f admet un minimum local en a.

(*ii*) Si $\mathrm{d}^2_a f$ est définie négative, f admet un maximum local en a.

3.2 Fonctions harmoniques

Définition 41. Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est de classe C^2, on appelle laplacien de f l'application définie par

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Si $\Delta f = 0$, on dit que f est harmonique.

Théorème 42 (Développement 2, ROU *p.*324)**.** f est harmonique sur Ω si et seulement si f vérifie la propriété de la moyenne.

3.3 Fonctions holomorphes

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On pose $F : (x,y) \mapsto (P(x,y), Q(x,y))$ où $f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$

Définition 43 (POM *p.*353)**.** On dit que f est holomorphe en $a \in \Omega$ si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(z+h) - f(z)}{h}$ existe.
On dit que f est holomorphe sur Ω si f est holomorphe en a pour tout $a \in \Omega$.

Théorème 44 (Cauchy-Riemann, POM *p.*353)**.** f est holomorphe en $z = x + iy$ si et seulement si F est différentiable en (x,y) et

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

Corollaire 45 (POM *p.*353)**.** Si f est holomorphe et de classe C^2 sur Ω, f est harmonique sur Ω.

Définition 46 (ROU *p.*66)**.** Si F est différentiable en (x,y) et si $\mathrm{d}_{(x,y)}F$ est inversible, F est conforme en (x,y) si F préserve les angles orientés en (x,y).

Théorème 47 (ROU *p.*66)**.** Si F est différentiable en (x,y) et si $\mathrm{d}_{(x,y)}F$ est inversible, f est holomorphe en $x+iy$ si et seulement si F est conforme en (x,y).

Références

[POM] : A. Pommellet - Cours d'analyse.
[GOU] : X. Gourdon - Les maths en tête, Analyse, 3ème édition.
[ROU] : F. Rouvière - Petit guide de calcul différentiel, 3ème édition.

Développements

[Développement 1] : Application 35.
[Développement 2] : Théorème 42.

Développement 1

Différentielle de l'exponentielle

(1) On se place dans un espace normé E de dimension finie. Fixons $H \in E$ et $A \in \mathrm{L}(E)$. Considérons les problèmes de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{c} f'(t) = Af(t) \\ f(0) = H \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} g'(t) = e^{tA}H \\ g(0) = 0 \end{array}\right.$$

où f et g sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans E.
Remarquons que les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire (coefficients constants) s'appliquent et donc que des solutions maximales existent et sont uniques.
Résolvons la première équation différentielle. On a

$$\begin{aligned} f' = Af &\iff e^{-At}f' - e^{-At}Af = 0 \\ &\iff (e^{-tA}f)' = 0 \\ &\iff e^{-tA}f = f(0) \\ &\iff f = e^{tA}H. \end{aligned}$$

Pour la deuxième équation différentielle, on cherche à primitiver $t \mapsto e^{tA}H$ en intégrant terme à terme la série entière définissant e^{tA}.
Ainsi, on remarque que l'application $t \mapsto \left(\sum_{k\geq 0} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}A^k\right) H$ est une solution de la deuxième équation différentielle. Par unicité, c'est la solution maximale recherchée.

(2) Pour $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $\mathrm{ad}_X = [H \mapsto XH - HX] \in \mathrm{L}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$. Si $H \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, la fonction $f(t) = e^{tA}He^{-tA}$ vérifie d'une part

$$\begin{aligned} f'(t) &= Ae^{tA}He^{-tA} - e^{tA}HAe^{-tA} \\ &= Ae^{tA}He^{-tA} - e^{tA}He^{-tA}A \\ &= \mathrm{ad}_A f(t) \end{aligned}$$

et d'autre part

$$f(0) = e^{0A}He^{-0A} = H,$$

c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{c} f'(t) = \mathrm{ad}_A f(t) \\ f(0) = H. \end{array}\right.$$

D'après (1), on a donc $f = e^{t\mathrm{ad}_A}H$.

(3) Soient $A, H \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On a

$$\mathrm{d}_A \exp(H) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}_{|u=0} e^{A+uH}.$$

Intéressons nous à $g : t \mapsto \partial u_{|u=0} e^{-tA}e^{t(A+uH)}$. L'application exponentielle étant de classe C^2, le théorème de Schwarz donne

$$\begin{aligned} g'(t) &= \partial t\, \partial u_{|u=0} e^{-tA}e^{t(A+uH)} \\ &= \partial u_{|u=0} \partial t e^{-tA}e^{t(A+uH)} \\ &= \partial u_{|u=0} \left(-Ae^{-tA}e^{t(A+uH)} + e^{-tA}(A+uH)e^{t(A+uH)}\right) \\ &= \partial u_{|u=0} ue^{-tA}He^{t(A+uH)} \\ &= e^{-tA}He^{tA}. \end{aligned}$$

Ainsi, (2) donne

$$g'(t) = e^{-t\mathrm{ad}_A}H.$$

La solution obtenue en (1) pour la deuxième équation différentielle nous garantit alors que

$$g(t) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}(-\mathrm{ad}_A)^k\right) H.$$

En particulier, pour $t = 1$, on trouve

$$g(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!}(-\mathrm{ad}_A)^k H.$$

Or, par définition de g, on a

$$\begin{aligned} g(1) &= \partial u_{|u=0} e^{-A}e^{A+uH} \\ &= e^{-A}\partial u_{|u=0} e^{A+uH} \\ &= e^{-A}\mathrm{d}_A \exp(H) \end{aligned}$$

d'où finalement

$$\mathrm{d}_A \exp(H) = e^A \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!}(-\mathrm{ad}_A)^k H.$$

Développement 2

La propriété de la moyenne implique l'harmonicité

On admet la formule d'intégration

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\|x\|)\mathrm{d}x = C\int_0^\infty f(\rho)\rho^{n-1}\mathrm{d}\rho$$

valable pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ telle que $f(\|.\|)$ soit intégrable, où C est une constante universelle ne dépendant que de n.
Pour $r > 0$, on notera $V_n(r)$ le volume des boules de rayons r.
1 Montrons que pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\int_{B(0,r)} x^T Ax\,\mathrm{d}x = \frac{r^2 V_n(r)}{n+2}\,\mathrm{Tr}(A).$$

Les membres de droite et de gauche étant linéaires en A et nuls si A est antisymétrique, on peut supposer que A est symétrique.
Par le théorème spectral, il existe une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $A = P^T \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P$. On a alors par changement de variable $y = Px$.

$$\begin{aligned}\int_{B(0,r)} x^T Ax\,\mathrm{d}x &= \int_{B(0,r)} x^T P^T \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)Px\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{B(0,r)} (Px)^T \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)(Px)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{B(0,r)} y^T \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)y\,\mathrm{d}y\\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k \int_{B(0,r)} y_k^2\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Par changement de variable permutant les variables, les intégrales $\int_{B(0,r)} y_k^2\,\mathrm{d}y$ sont toutes égales et on a de plus, d'après la formule admise

$$\begin{aligned}n\int_{B(0,r)} y_1^2\,\mathrm{d}y &= \int_{B(0,r)} \sum_{k=1}^n y_k^2\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \|y\|^2 \mathbb{1}_{[0,r]}(\|y\|)\,\mathrm{d}y\\ &= C\int_0^{+\infty} \rho^{n+1}\mathbb{1}_{[0,r]}(\rho)\mathrm{d}\rho\\ &= C\frac{r^{n+2}}{n+2}.\end{aligned}$$

Ainsi, on a $\displaystyle\int_{B(0,r)} x^T Ax\,\mathrm{d}x = \frac{Cr^n}{n}\frac{r^2}{n+2}\,\mathrm{Tr}(A)$. Or, la formule admise pour $f = \mathbb{1}_{[0,r]}$ donne

$$V_n(r) = \frac{Cr^n}{n}$$

d'où

$$\int_{B(0,r)} x^T Ax\,\mathrm{d}x = V_n(r)\frac{r^2}{n+2}\,\mathrm{Tr}(A).$$

2 Montrons que si f est de classe C^2 au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}^n$ alors

$$\mathrm{M}f(a,r) = f(a) + \frac{r^2}{2(n+2)}\Delta f(a) + o(r^2).$$

D'après la formule de Taylor, on a

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}_a f(h) + \frac{1}{2}\mathrm{d}_a^2 f(h,h) + R(h)$$

où $R(h) = o(\|h\|^2)$ quand $h \to 0$. Ainsi, on a

$$\mathrm{M}f(a,r) = \frac{1}{V_n(r)}\int_{B(0,r)} f(a+h)\,\mathrm{d}h = \frac{1}{V_n(r)}\int_{B(0,r)} f(a)+\mathrm{d}_a f(h)+\frac{1}{2}\mathrm{d}_a^2 f(h,h)+R(h)\,\mathrm{d}h.$$

Or, $d_a f$ est linéaire donc le changement de variable $k = -h$ donne

$$\int_{B(0,r)} \mathrm{d}_a f(h)\,\mathrm{d}h = 0$$

et la formule 1 donne

$$\int_{B(0,r)} \mathrm{d}_a^2 f(h,h)\,\mathrm{d}h = \frac{r^2 V_n(r)}{n+2}\Delta f(a).$$

Enfin, si $\varepsilon > 0$ est fixé, il existe $\delta > 0$ tel que $\|h\| \leqslant \delta \implies |R(h)| \leqslant \varepsilon\|h\|^2$ donc pour $r \leqslant \delta$, on a

$$\left|\int_{B(0,r)} R(h)\,\mathrm{d}h\right| \leqslant \int_{B(0,r)} \varepsilon r^2\,\mathrm{d}h = V_n(r)\varepsilon r^2$$

d'où

$$\left|\frac{1}{V_n(r)}\int_{B(0,r)} \mathrm{d}_a^2 f(h,h)\,\mathrm{d}h\right| \leqslant \varepsilon r^2$$

et

$$\frac{1}{V_n(r)}\int_{B(0,r)} \mathrm{d}_a^2 f(h,h)\,\mathrm{d}h = o(r^2)$$

Ainsi, on a bien

$$\mathrm{M}f(a,r) = f(a) + \frac{r^2}{2(n+2)}\Delta f(a) + o(r^2).$$

3 Supposons que f vérifie la propriété de la moyenne. D'après 2, pour tout $a \in \Omega$, on a

$$\Delta f(a) = \frac{2(n+2)}{r^2}o(r^2) = o(1).$$