Leçon 230

Séries de nombres réels ou complexes. Comportements des restes ou des sommes partielles des séries numériques.

Pré-requis

- Notion de série numérique et de convergence d'une série numérique.

1 Séries à termes positifs

Lemme 1 (MON, p.226)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs. La série $\sum_n u_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est bornée.

Exemple 2.

1. La série harmonique $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge.
2. La série $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge.

Théorème 3 (Théorème de comparaison, MON $p.226-227$)**.**
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes positifs.

- Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang alors $\sum_n v_n$ converge $\implies$ $\sum_n u_n$ converge et $\sum_n u_n$ diverge $\implies$ $\sum_n v_n$ diverge.
- Si $u_n = o(v_n)$ alors $\sum_n v_n$ converge $\implies$ $\sum_n u_n$ converge et
- Si $u_n = O(v_n)$ alors $\sum_n v_n$ converge $\implies$ $\sum_n u_n$ converge.
- Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum_n v_n$ converge $\iff$ $\sum_n u_n$ converge.

Théorème 4 (Critère de Riemann, MON p.228)**.** Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. La série de terme général $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Proposition 5 (Comparaison série-intégrale, MON $p.255-256$)**.** Soient $n_0\in\mathbb{N}$, $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux, décroissante.
Pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ tel que $n_0 \leqslant p < q$, on a

$$\int_{p+1}^{q+1} f \leqslant \sum_{k=p+1}^{q} f(k) \leqslant \int_p^q f.$$

En particulier, la série $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ converge si et seulement l'application f est intégrable sur $[n_0, +\infty[$, et, dans ces conditions, on a :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \int_{n+1}^{+\infty} f \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_n^{+\infty} f.$$

Remarque 6. On utilise souvent des variantes de ce résultat dans le cas où la fonction n'est pas décroissante mais croissante. Dans tous les cas le point clef est la comparaison entre les suites $\int_0^n f(t)\mathrm{d}t$ et $\sum_{k=0}^n f(k)$ via la monotonie de f.

Exemple 7.

1. On a $\ln(n!) \sim n\ln(n)$ quand $n\to+\infty$.
2. Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \text{ converge} \iff \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).$$

Proposition 8 (GOU p.210, Développement 1)**.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles positives équivalentes.

- Si $\sum_n u_n$ converge alors $\sum_n v_n$ aussi et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.
- Si $\sum_n u_n$ diverge alors $\sum_n v_n$ aussi $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Remarque 9. On peut donner un résultat analogue avec les relations de négligeabilité et de domination.

Application 10 (Développement 1, GOU p.211)**.** La suite des nombres harmoniques

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

admet le développement asymptotique

$$H_n = \gamma + \ln(n) + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{quand } n\to+\infty.$$

Proposition 11 (Règle de D'Alembert, MON, p.233)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs. On suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geqslant 0}$ admet une limite $\ell\in\mathbb{R}_+$.

- Si $\ell < 1$, alors $\sum_n u_n$ converge.
- Si $\ell > 1$, alors $\sum_n u_n$ diverge.

Exemple 12. $\displaystyle\sum_n \frac{n!}{n^n}$ converge.

Remarque 13. Si $\ell = 1$ ou si la limite n'existe pas, on ne peut pas conclure en général. Pour $u_n = \frac{1}{n}$, $\ell = 1$ et la série diverge alors que pour $u_n = \frac{1}{n^2}$, $\ell = 1$ et la série converge.

2 Séries dont le terme général n'est pas nécessairement positif

Définition 14 (MON, p.244)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On dit que la série de terme générale $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument si la série de terme générale $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Théorème 15 (MON, p.244)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Si la série de terme générale $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument alors elle converge.

Remarque 16. Tous les critères de convergence précédents peuvent donc être utilisés via ce théorème pour montrer la convergence d'une série complexe.
La réciproque est fausse, comme le montre le contre-exemple $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ via le prochain théorème. On parle alors de série semi-convergente.

Exemple 17. La série $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n\sqrt{n}+\sin(n)}{n^2}$ converge absolument.

Définition 18. On dit qu'une série $\sum_n u_n$ est alternée si

$$u_n = (-1)^n|u_n| \quad \text{ou} \quad u_n = (-1)^{n+1}|u_n|.$$

Théorème 19 (Critère des séries alternées, MON *p*.250)**.** Soit $\sum_n u_n$ une série à termes réels.

Si $\begin{cases} \sum_n u_n \text{ est alternée} \\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ (|u_n|)_n \text{ décroît} \end{cases}$, alors $\sum_n u_n$ converge.

Proposition 20 (MON *p*.268)**.** Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent, on a

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad |R_N| = \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n\right| \leqslant u_{N+1}.$$

Lemme 21 (Transformation d'Abel, GOU *p*.215)**.** Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. On pose la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n.$$

Théorème 22 (Règle d'Abel, GOU *p*.215)**.** Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. On suppose que

- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et tend vers 0.
- La suite des sommes partielles de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Alors, la série de terme général $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exemple 23. Si $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes positifs décroissante et de limite nulle, les séries de terme général $e^{2i\pi\theta n}u_n$, $\cos(2\pi\theta)u_n$ et $\sin(2\pi\theta)u_n$ convergent. En particulier, pour tout $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ et tout $\alpha > 0$, la série de terme général $\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge.

3 Applications

Sommation au sens d'Abel

Théorème 24 (Théorème d'Abel, FRA *p*.178, Développement 2)**.** Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\geqslant 1$ telle que $\sum_n a_n$ converge. La série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge uniformément sur $[0,1]$. En particulier, on a

$$\lim_{\substack{z\to 1 \\ z\in[0,1]}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Application 25.

- On a $\pi = 4\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
- Pour tout $z \in \{t \in \mathbb{C} \mid |t| = 1\}\backslash\{-1\}$, on a $\mathrm{Log}(1+z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$.

Théorème 26 (Théorème taubérien faible, FRA *p*.220, Développement 2)**.** Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et f la somme de cette série entière sur le $[0,1[$. On suppose que la limite $\ell = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x)$ existe.

Si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ alors $\sum_n a_n$ converge et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell.$$

Produit de Cauchy

Définition 27 (GOU *p*.216)**.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. Le produit de Cauchy des séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ est défini comme étant la série de terme général

$$w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Théorème 28 (GOU *p*.216)**.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. Si les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ convergent absolument, leur produit de Cauchy converge absolument et coïncide avec le produit des deux séries :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Exemple 29.

- Il ne suffit pas que les deux séries convergent pour que le produit de Cauchy existe. Le cas $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ en constitue un contre-exemple .
- Si $s, t \in \mathbb{C}$, on a $e^s e^t = e^{s+t}$.
- Si f et g sont deux fonctions DSE au voisinage d'un point alors fg l'est aussi.
- Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes, leurs fonctions génératrices vérifient $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Proposition 30. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. Si les séries $\sum_n u_n$, $\sum_n v_n$ ainsi que leur produit de Cauchy $\sum_n w_n$ convergent alors on a

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n.$$

Développement 1

Théorème de sommation des équivalents et développement asymptotique de la suite des nombres harmoniques

1 Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites à termes positifs équivalentes.

• Si $\sum_n u_n$ converge : On sait que la série $\sum_n v_n$ converge également. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$

$$(1-\varepsilon)v_k \leqslant u_k \leqslant (1+\varepsilon)v_k.$$

En sommant ces inégalités pour $k \geqslant n$, on obtient

$$(1-\varepsilon)\sum_{k\geqslant n+1} v_k \leqslant \sum_{k\geqslant n+1} u_k \leqslant (1+\varepsilon)\sum_{k\geqslant n+1} v_k$$

pour tout $n \geqslant N$. Ainsi, on a bien $\displaystyle\sum_{k\geqslant n+1} u_k \sim \sum_{k\geqslant n+1} v_k$.

• Si $\sum_n u_n$ diverge : On sait que la série $\sum_n v_n$ converge également. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$

$$(1-\varepsilon)v_k \leqslant u_k \leqslant (1+\varepsilon)v_k.$$

Pour tout $n \geqslant N$, on a donc

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} u_k + (1+\varepsilon)\sum_{k=N}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} u_k + (1+\varepsilon)\sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Or, la suite des sommes partielles de terme général v_k étant divergente vers $+\infty$, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N'$

$$\sum_{k=0}^{N-1} u_k \leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Ainsi, si $n \geqslant \max(N, N')$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} u_k + (1+\varepsilon)\sum_{k=0}^{n} v_k \leqslant (1+2\varepsilon)\sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Par symétrie, il existe $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant \tilde{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} v_k \leqslant (1+2\varepsilon)\sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$.

2 Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On a $\frac{1}{k} \sim \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ et $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}$ diverge donc par sommation des équivalents, on a

$$H_n \sim \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) \sim \ln(n).$$

Pour $n \geqslant 1$, on pose $s_n = H_n - \ln(n)$. Pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$s_{n-1} - s_n = -\frac{1}{n} - \ln(n-1) + \ln(n) = -\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{-1}{n}\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or, $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge donc la série $\sum_n (s_{n-1} - s_n)$ aussi. De plus, pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$\sum_{k=2}^{n} (s_{k-1} - s_k) = s_1 - s_n$$

donc la suite $(s_n)_n$ converge. Posons $\gamma \in \mathbb{R}$ sa limite. Le théorème de sommation des équivalents nous permet d'écrire

$$s_n - \gamma = (s_1 - \gamma) - (s_1 - s_n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (s_{k-1} - s_k) \sim \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

et par comparaison série-intégrale, on a

$$\frac{1}{n+1} = \int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{n}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{n}.$$

Ainsi, par encadrement, on a

$$s_n - \gamma \sim \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{2n}.$$

Finalement, on a

$$H_n = \gamma + \ln(n) + (s_n - \gamma) = \gamma + \ln(n) + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Développement 2

Théorème d'Abel et théorème Taubérien faible

1 Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres complexes telle que le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$ soit supérieur ou égal à 1. On suppose de plus que $\sum_n a_n$ converge.
On pose $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ pour $n \geqslant 0$.
Soit $x \in [0,1[$. Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} (r_{k-1} - r_k) x^k \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} r_{k-1} x^k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} r_k x^k \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} r_k x^{k+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} r_k x^k \\ &= r_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} r_k (x^{k+1} - x^k) \\ &= r_n x^{n+1} + (x-1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} r_k x^k\end{aligned}$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. La suite $(r_n)_n$ converge vers 0 donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|r_n| \leqslant \varepsilon$. Alors, pour tout $n \geqslant N$ et tout $x \in [0,1[$, on a

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k\right| &= \left| r_n x^{n+1} + (x-1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} r_k x^k \right| \\ &\leqslant |r_n x^{n+1}| + |x-1| \sum_{k=n+1}^{+\infty} |r_k x^k| \\ &\leqslant \varepsilon + (1-x) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon x^k \\ &= \varepsilon + \varepsilon x^{n+1} \\ &\leqslant 2\varepsilon.\end{aligned}$$

De plus, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k 1^k\right| = |r_n| \leqslant \varepsilon \leqslant 2\varepsilon$ donc $\sup_{x\in[0,1]} \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k\right| \leqslant 2\varepsilon$, ce qui prouve la convergence uniforme sur $[0,1]$.

2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Soit $x \in [0,1[$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$|S_n - \ell| \leqslant |S_n - f(x)| + |f(x) - \ell|.$$

Il nous suffit donc de majorer la quantité $|S_n - f(x)|$. Remarquons que

$$\begin{aligned}|S_n - f(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n} a_k (1-x^k) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k\right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k| (1-x^k) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| x^k \\ &\leqslant (1-x) \sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} k|a_k| x^k.\end{aligned}$$

Or, $k a_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ donc $\sup_{k\geqslant n+1} k|a_k| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On a alors

$$\begin{aligned}|S_n - f(x)| &\leqslant (1-x) \sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \sup_{k\geqslant n+1} k|a_k| \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \\ &\leqslant (1-x) \sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \sup_{k\geqslant n+1} k|a_k| \frac{1}{n(1-x)} \\ &= (1-x) n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} k|a_k|\right) + \sup_{k\geqslant n+1} k|a_k| \frac{1}{n(1-x)}.\end{aligned}$$

De plus, le lemme de Cesàro nous assure que $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} k|a_k| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc il ne nous reste plus qu'à choisir le point $x \in [0,1[$ en lequel évaluer pour simplifier notre majoration. On choisit alors x tel que $(1-x)n = 1$, c'est-à-dire $x = 1 - \frac{1}{n}$ et on obtient finalement

$$|S_n - \ell| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \sup_{k\geqslant n+1} k|a_k| + \left| f\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \ell \right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi, $\sum_{k\geqslant 0} a_k$ converge et vaut ℓ.

Références

[MON] : J.M. Monier - Analyse MP, 5ème édition.
[GOU] : X. Gourdon - Les maths en tête, Analyse, 3ème édition.
[FRA] : S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas - Oraux X-ENS, Analyse 2.

Développements

[Développement 1] : Proposition 8, Application 10.
[Développement 2] : Théorème 24, Théorème 26.