Université de Reims Champagne-Ardenne

Sur une généralisation de la dualité de Pontryagin

Valentin Massicot

Sous la direction de Victor Gayral

Janvier 2024 - Juin 2024

Table des matières

Introduction

Ce mémoire a pour but de présenter une généralisation de la notion de groupe via des algèbres d'opérateurs. La nécessité de cette généralisation provient du problème de la généralisation au cas non-abélien de la dualité de Pontryagin. Rappelons rapidement son énoncé. Étant donné un groupe topologique abélien localement compact G, il est possible de construire son groupe dual $\hat{G} \triangleq \mathrm{Hom}(G, \mathbb{T})$ où $\mathbb{T}$ désigne le cercle unité du plan complexe. Ce groupe est alors abélien et il devient un groupe topologique localement compact grâce à la topologie compacte-ouverte. Il est donc possible de réitérer la construction et on obtient alors le groupe topologique abélien localement compact $\hat{\hat{G}} \triangleq \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(G, \mathbb{T}), \mathbb{T})$. L'application canonique

$$\mathrm{ev} : \begin{array}{ccc} G & \to & \hat{\hat{G}} \\ x & \mapsto & \mathrm{ev}_x = [\chi \mapsto \chi(x)] \end{array}$$

est alors un isomorphisme de groupes topologiques : c'est le théorème de dualité de Pontryagin. La commutativité du groupe G est ici primordiale : même dans le cas où G est discret [1], le résultat tel qu'énoncé est faux en général. En effet, il est bien connu que dès lors que $n \geq 2$, $\mathrm{Hom}(S_n, \mathbb{T})$ est réduit au morphisme trivial et à la signature. Ainsi, la correspondance $G \mapsto \mathrm{Hom}(G, \mathbb{T})$ n'est pas injective si on inclut les groupes non abéliens mais ce n'est pas le seul problème, le dual ne sépare plus toujours les points si le groupe n'est pas abélien.

Pendant longtemps, le problème a donc été de trouver une catégorie plus grande que celle des groupes qui puisse contenir les groupes topologiques raisonnables [2] ainsi qu'un dual généralisé. De nombreuses tentatives ont vu le jour durant le 20ème siècle, T. Tannaka démontra en 1938 comment retrouver un groupe compact via ses représentations irréductibles puis W.F. Stinespring démontra en 1959 comment retrouver un groupe localement compact unimodulaire via la structure d'algèbre de Hopf de son algèbre de von Neumann. En 1961, G.I. Kac introduisit une structure appelée ring group. G.I. Kac démontra que cette catégorie contient celle des groupes localement compacts unimodulaires et admet une dualité mais qu'elle contient également des objets ne correspondant pas à des groupes. Cette structure a été peaufinée jusqu'en 1973 par M. Takesaki, L. Vainerman, G.I. Kac, M. Enock et J.-M. Schwartz pour qu'elle contienne tous les groupes localement compacts. Cette structure est maintenant appelée algèbre de Kac. En 1987, S.L. Woronowicz construisit un objet très semblable à une algèbre de Kac mais qui ne vérifie pas tous les axiomes nécessaires. Il a donc fallu trouver une structure encore plus générale contenant à la fois les algèbres de Kac et l'exemple de S.L. Woronowicz. En 1992, S.L. Woronowicz donna la définition d'un groupe quantique compact pour lesquels il démontra l'existence et l'unicité d'un analogue à la mesure de Haar. Après plusieurs tentatives, c'est S. Vaes et J. Kustermans qui trouvèrent une bonne définition pour les groupes quantiques localement compacts, c'est cette théorie qui nous intéressera dans ce mémoire.

La théorie des groupes quantiques localement compacts de S.Vaes et J.Kustermans, tout comme la théorie des algèbres de Kac, est une approche faisant appel aux C^*-algèbres et aux algèbres de von Neumann. Nous rappelons brièvement leurs définitions et leurs propriétés principales dans l'annexe A.

La structure de ce mémoire sera la suivante :

- La Section 1 portera sur la définition au sens des algèbres de von Neumann d'un groupe quantique localement compact au sens de S. Vaes et J. Kustermans.
- Dans la Section 2, nous verrons comment construire des groupes quantiques localement compacts von Neumann à l'aide d'un groupe localement compact à base dénombrable.
- Nous verrons dans la Section 3 comment il est possible de définir le dual d'un groupe quantique localement compact et en quoi cette construction prolonge la dualité de Pontryagin.
- La Section 4 portera sur l'analogue des actions de groupes pour les groupes quantiques localement compacts.
- Finalement, nous étudierons dans la Section 5 une méthode pour construire des groupes quantiques localement compacts qui ne viennent pas de groupes localement compacts.

Nous suivrons principalement les travaux [4], [5], [9], [1] de S. Vaes, J. Kustermans, S. Baaj et L. Vainerman et renvoyons aux livres [6] et [7] de M. Takesaki pour la théorie générale des algèbres d'opérateurs.

1. Ce qui correspond au cas où le caractère topologique est laissé de côté.
2. Généralement localement compacts et à base dénombrable.

1 La structure de groupe quantique localement compact

1.1 La traduction groupe-bigèbre

La théorie des groupes quantiques localement compacts étant une théorie basée sur les algèbres d'opérateurs, nous allons tenter de reformuler les axiomes définissant un groupe topologique localement compact. Nous fixons, pour toute cette partie, un groupe topologique localement compact G. Nous renvoyons à l'Annexe B pour les résultats de base sur les groupes topologiques localement compacts et la mesure de Haar.
Le groupe G est caractérisé par les axiomes suivants :

(MA) G est muni d'une multiplication $m : G \times G \to G$ associative.

(EN) G admet un élément neutre e pour la loi m.

(EI) Tout élément de G admet un inverse pour la loi m.

(LC) G est un espace topologique localement compact et ses opérations sont continues.

L'axiome (LC) pourrait nous donner envie de remplacer G par l'algèbre de fonctions $C_0(G)$ qui, on le sait, est l'exemple type d'une C^*-algèbre. Ce choix est tout à fait pertinent mais la théorie des groupes quantiques qui en résulte est, bien que parfaitement équivalente à celle que nous allons étudier, moins élégante et plus technique dans plusieurs aspects. L'axiome (LC) servant principalement à assurer l'existence d'une mesure de Haar sur G, il est également raisonnable de remplacer G par l'algèbre $L^\infty(G,\mu)$ [1] (que nous noterons simplement $L^\infty(G)$) où μ est une mesure de Haar sur G [2]. Ce choix peut également être rassuré par la réciproque partielle au théorème de Haar due à André Weil [3]. L'axiome (MA) est alors facile à traduire au niveau de $L^\infty(G)$: on dispose d'une application

$$\Delta : \begin{array}{ccc} L^\infty(G) & \to & L^\infty(G\times G) \\ f & \mapsto & [(x,y)\mapsto f(xy)] \end{array} .$$

La bonne définition de Δ provient directement de l'invariance des mesures de Haar. En effet, si $f : G \to \mathbb{C}$ est mesurable et nulle presque partout, on a $\displaystyle\int_G |f(xy)|\mathrm{d}\mu(y) = \int_G |f(y)|\mathrm{d}\mu(y) = 0$ pour tout $x \in G$. Ainsi, en supposant que G est σ-fini pour utiliser le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} \int_{G\times G} |\Delta(f)|\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu) &= \int_G\int_G |f(xy)|\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_G 0\,\mathrm{d}\mu(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où $\Delta(f) = 0$ presque partout, ce qui implique que Δ passe au quotient à $L^\infty(G)$.
L'associativité de m implique alors que Δ vérifie le diagramme ci-dessous exprimant l'égalité $(\Delta\otimes\iota)\Delta = (\iota\otimes\Delta)\Delta$ où ι désigne l'application identité en une variable.

$$\begin{tikzcd} L^\infty(G) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & L^\infty(G\times G) \arrow[d, "\Delta\otimes\iota"] \\ L^\infty(G\times G) \arrow[r, "\iota\otimes\Delta"'] & L^\infty(G\times G\times G) \end{tikzcd}$$

L'axiome (LC) a motivé notre choix d'utiliser $L^\infty(G)$ mais nous ne l'avons pas totalement exploité. Les mesures de Haar à gauche et à droite μ et ν sur G nous fournissent également les deux applications

$$\varphi : \begin{array}{ccc} L^\infty(G)^+ & \to & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_G f\mathrm{d}\mu \end{array} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{array}{ccc} L^\infty(G)^+ & \to & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_G f\mathrm{d}\nu \end{array}$$

définies sur $L^\infty(G)^+ = \{f \in L^\infty(G) \mid f \geq 0\}$. L'invariance des mesures de Haar se traduit facilement en deux relations entre φ, ψ et Δ :

$$(\iota\otimes\varphi)\Delta = \varphi\,\mathbb{1}_G$$
$$(\psi\otimes\iota)\Delta = \psi\,\mathbb{1}_G$$

Il ne nous reste plus qu'à traduire les axiomes (EE) et (EI). Il serait tentant de dire [4], que l'on dispose de deux

1. Qui est cette fois l'exemple type d'une algèbre de von Neumann.
2. Les mesures de Haar à droite et à gauche étant absolument continue l'une par rapport à l'autre, le choix de la mesure de Haar n'influe pas l'ensemble $L^\infty(G)$.
3. Voir [3] page 275.
4. C'est d'ailleurs l'approche utilisée dans les algèbres de Hopf.

applications

$$S : \begin{array}{ccc} L^\infty(G) & \to & L^\infty(G) \\ f & \mapsto & [x \mapsto f(x^{-1})] \end{array} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon : \begin{array}{ccc} L^\infty(G) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & f(e). \end{array}$$

vérifiant les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
& L^\infty(G\times G) \arrow[dr, "\iota\otimes\varepsilon"] & \\
L^\infty(G) \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & L^\infty(G) \\
& L^\infty(G\times G) \arrow[ur, "\varepsilon\otimes\iota"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& L^\infty(G\times G) \arrow[r, "\iota\otimes S"] & L^\infty(G\times G) \arrow[dr, "\nabla"] & \\
L^\infty(G) \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[rrr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & & L^\infty(G) \\
& L^\infty(G\times G) \arrow[r, "S\otimes\iota"'] & L^\infty(G\times G) \arrow[ur, "\nabla"'] &
\end{tikzcd}$$

où ∇ désigne l'application $\begin{array}{ccc} L^\infty(G\times G) & \to & L^\infty(G) \\ F & \mapsto & [x \mapsto F(x,x)] \end{array}$.

Deux problèmes apparaissent alors [1] :

(i) L'application ε n'est pas bien définie dès que G n'est pas discret car dans ce cas, les mesures de Haar sont sans atome et l'évaluation en un point n'a pas de sens pour des classes d'équivalences.

(ii) L'application ∇ n'est pas non plus bien définie en général car $\{(x,x) \mid x \in G\}$ peut-être de mesure nulle.

Il est donc difficile de donner un sens précis à la counité et par conséquent, de traduire l'axiome (EN) au niveau de $L^\infty(G)$. Remarquons cependant que l'application S se comporte très bien : c'est une isométrie de $L^\infty(G)$ qui commute avec l'involution (la conjugaison complexe) et elle vérifie $S^2 = \iota$. L'antimultiplicativité de l'inversion dans G implique également que S est un anticomorphisme dans le sens où on a $\Delta S = \sigma(S\otimes S)\Delta$ où σ est l'échange des variables sur $L^\infty(G\times G)$:

$$\sigma : \begin{array}{ccc} L^\infty(G\times G) & \to & L^\infty(G\times G) \\ F & \mapsto & [(x,y) \mapsto F(y,x)] \end{array}.$$

Nous verrons qu'il est tout de même possible de donner un sens à l'inversion de G au niveau des groupes quantiques et ce, sans donner un sens à l'élément neutre. C'est ce que nous appellerons l'antipode. Cependant, contrairement au cas de l'inversion d'un groupe, l'antipode sera en général un opérateur non borné densément défini. Cette restriction est motivée par la construction d'une déformation de $SU(2)$ par Woronowicz dans [10] dans laquelle l'analogue à l'inversion du groupe est un opérateur non borné densément défini. L'antipode nous servira notamment à faire un choix canonique pour ψ à partir de ϕ en posant

$$\psi \triangleq \varphi \circ R$$

où R est l'isométrie intervenant dans la décomposition polaire de S. Cela correspond au fait que si μ est une mesure de Haar à gauche, l'application $[A \mapsto \mu(A^{-1})]$ est une mesure de Haar à droite.

1. C'est également le cas dans l'approche C^*-algébrique.

1.2 La définition d'un groupe quantique

La traduction des propriétés d'un groupe G à travers l'algèbre $L^\infty(G)$ établie précédemment nous donne une bonne idée de ce que doit être un groupe quantique. Nous allons maintenant formaliser cette intuition en définissant de nombreux objets.

Jusqu'à la fin de cette partie, nous désignerons pas M une algèbre de von Neumann.
Une comultiplication sur une algèbre de von Neumann est un $*$-morphisme $\Delta : M \mapsto M \otimes M$ unifère, σ-faiblement continu et rendant commutatif le diagramme de coassociativité suivant où ι désigne l'application identité de M.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & M \otimes M \arrow[d, "\Delta\otimes\iota"] \\
M \otimes M \arrow[r, "\iota\otimes\Delta"'] & M \otimes M \otimes M
\end{tikzcd}$$

Le couple (M, Δ) est appelé bigèbre de von Neumann.

Un poids sur une algèbre de von Neumann est une application $\varphi : M^+ \to \overline{\mathbb{R}_+}$ additive et positivement homogène. On définit alors les ensembles

$$\mathcal{M}_\varphi^+ = \{x \in M^+ \mid \varphi(x) < +\infty\},$$

$$\mathcal{N}_\varphi = \{x \in M \mid \varphi(x^*x) < +\infty\},$$

$$\mathcal{M}_\varphi = \mathrm{Vect}(\mathcal{M}_\varphi^+).$$

Il est clair que φ admet un unique prolongement par linéarité à $\mathcal{M}_\varphi$. Ce prolongement est alors une forme linéaire positive sur $\mathcal{M}_\varphi$ et sera également noté φ. Remarquons que par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\mathcal{N}_\varphi$ est un idéal à gauche de M.
On dira que φ est

- invariant à gauche [1] si $\varphi((\omega \otimes \iota)\Delta(x)) = \omega(1)\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathcal{M}_\varphi^+$ et $\omega \in M_*^+$.
- invariant à droite si $\varphi((\iota \otimes \omega)\Delta(x)) = \omega(1)\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathcal{M}_\varphi^+$ et $\omega \in M_*^+$.
- invariant si φ est invariant à droite et à gauche.
- normal si pour toute suite généralisée croissante bornée $(x_i)_{i\in I}$ de M_+ on a

$$\varphi\left(\sup_{i\in I} x_i\right) = \sup_{i\in I}\left(\varphi(x_i)\right).$$

- semi-fini si $\mathcal{M}_\varphi$ est σ-faiblement dense dans M.
- fidèle si $\varphi(x) \neq 0$ dès que $x \in M_+$ est non nul.
- un poids n.s.f. si φ est normal, semi-fini et fidèle.

Le rôle des poids n.s.f. dans les groupes quantiques sera de remplacer la mesure de Haar des groupes localement compacts. Remarquons que l'invariance n'est définie que vis-à-vis de $\mathcal{M}_\varphi^+$, qui correspond donc à l'ensemble $(L^\infty(G) \cap L^1(G))^+$. L'espace $L^2(G)$ sera remplacé par la construction GNS [2].

Définition 1.1. *Soit φ un poids sur une algèbre de von Neumann M. Une construction GNS pour φ est un triplet $(\mathcal{H}_\varphi, \Lambda_\varphi, \pi_\varphi)$ où*

- *$\mathcal{H}_\varphi$ est un espace de Hilbert.*
- *$\Lambda_\varphi : \mathcal{N}_\varphi \to \mathcal{H}_\varphi$ est une application linéaire d'image dense telle que $\langle \Lambda_\varphi(x) | \Lambda_\varphi(y) \rangle = \varphi(y^*x)$ pour tous $x, y \in \mathcal{N}_\varphi$.*
- *π_φ est une $*$-représentation de M sur $\mathcal{H}_\varphi$ telle que $\pi_\varphi(x)\Lambda_\varphi(y) = \Lambda_\varphi(xy)$ pour tous $x \in M$ et $y \in \mathcal{N}_\varphi$.*

Si $(\mathcal{H}_\varphi, \Lambda_\varphi, \pi_\varphi)$ est une construction GNS pour φ, on dira que $\mathcal{H}_\varphi$ est l'espace GNS, que Λ_φ est l'application GNS et que π_φ est la représentation GNS.

1. Il est en fait possible de définir la notion de poids partiels en considérant la partie positive étendue de M. Notre définition de l'invariance à gauche se réécrit alors $(\iota \otimes \varphi)(\Delta(x)) = \varphi(x)1$ pour tout $x \in \mathcal{M}_\varphi^+$.
2. Nommée en l'honneur des mathématiciens Israel Gelfand, Mark Naimark et Irving Segal.

Proposition 1.2. *Tout poids sur une algèbre de von Neumann admet une construction GNS.*

Démonstration.

Soit φ un poids sur une algèbre de von Neumann M. L'application $(x, y) \mapsto \varphi(y^*x)$ définit une forme hermitienne sur $\mathcal{N}_\varphi$. Posons $I_\varphi = \{a \in \mathcal{N}_\varphi \mid \varphi(a^*a) = 0\}$. Le quotient $\mathcal{N}_\varphi/I_\varphi$ est alors un espace préhilbertien et on peut considérer son complété Hilbertien $\mathscr{H}_\varphi$ ainsi que l'application canonique Λ_φ de $\mathcal{N}_\varphi$ dans son séparé complété. Soit maintenant $x \in M$. L'endomorphisme $\pi(x) : y \mapsto xy$ de $\mathcal{N}_\varphi$ induit un endomorphisme de $\mathcal{N}_\varphi/I_\varphi$ continu pour la norme induite par le produit hermitien. Ainsi, $\pi(x)$ se prolonge en un opérateur borné sur $\mathscr{H}_\varphi$. L'application π_φ ainsi obtenue est alors une $*$-représentation de M sur $\mathscr{H}_\varphi$ et le triplet $(\mathscr{H}_\varphi, \Lambda_\varphi, \pi_\varphi)$ est une construction GNS pour φ. □

Remarquons que si φ est un poids sur M, toute construction GNS le détermine entièrement. En effet $\mathcal{N}_\varphi$ est le domaine de définition de Λ_φ et si $x \in M^+$, il existe $y \in M$ tel que $x = y^*y$ et on a

$$\varphi(x) = \begin{cases} \left\|\Lambda_\varphi(y)\right\|^2 \text{ si } y \in \mathcal{N}_\varphi \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases} .$$

Nous sommes désormais en mesure de donner une définition précise des groupes quantiques au sens des algèbres de von Neumann.

Définition 1.3. *Un groupe quantique localement compact est un quadruplet $(M, \Delta, \varphi, \psi)$ constitué d'une algèbre de von Neumann M, d'une comultiplication Δ et de deux poids n.s.f. φ et ψ avec φ invariant à gauche et ψ invariant à droite.*

La normalité, la semie-finitude et la fidélité du poids nous assurent la continuité σ-faible, la fidélité et la non-dégénérescence de la représentation associée à la construction GNS du poids. Une fois un poids n.s.f. fixé, on considérera donc que M est une algèbre de von Neumann sur l'espace de Hilbert de sa construction GNS en identifiant M et $\pi_\varphi(M) \subset \mathcal{B}(\mathscr{H}_\varphi)$ [1]. Nous noterons parfois (M, Δ) pour référer à un groupe quantique, sans mentionner les poids invariants. Cette convention est notamment justifiée par le prochain théorème.

La différence principale avec les groupes localement compacts est que l'existence des poids de Haar est ici un axiome et non un théorème. Cependant, on dispose quand même d'un théorème d'unicité les concernant.

Théorème 1.4. *Soit $(M, \Delta, \varphi, \psi)$ un groupe quantique localement compact et soit φ' un poids n.s.f. invariant à gauche. Il existe $r > 0$ tel que $\varphi' = r\varphi$. Similairement, si ψ' est un poids n.s.f. invariant à droite, il existe $s > 0$ tel que $\psi' = s\psi$.*

1.3 L'antipode d'un groupe quantique

Soit $(M, \Delta, \varphi, \psi)$ un groupe quantique localement compact. Il est possible, sans rien supposer de plus, de construire un opérateur non borné densément défini jouant le rôle de l'inversion d'un groupe. Cette construction est très technique et nous ne la détaillerons pas [2]. L'idée principale est de la définir premièrement au niveau de l'espace de Hilbert sur lequel agit M puis de la définir sur M via sa décomposition polaire. Il est tout de même possible d'en énoncer une caractérisation relativement simple et de donner ses propriétés principales.

1. On dit que M est en forme standard.
2. La construction complète est présente dans [4].

Théorème 1.5. *Il existe un unique opérateur non borné fermé S de domaine $D(S)$ vérifiant :*

(i) Pour tous $a, b \in \mathcal{N}_\psi$, $(\psi \otimes \iota)((a^* \otimes 1)\Delta(b)) \in D(S)$.

(ii) Pour tous $a, b \in \mathcal{N}_\psi$, $S((\psi \otimes \iota)((a^* \otimes 1)\Delta(b))) = (\psi \otimes \iota)(\Delta(a^*)(b \otimes 1))$.

(iii) L'ensemble $C = \{(\psi \otimes \iota)((a^* \otimes 1)\Delta(b)) \mid a, b \in \mathcal{N}_\psi\}$ est un coeur pour S et la topologie σ-faible au sens suivant :

$$\overline{\{(x, S(x)) \mid x \in C\}}^{\sigma-\mathrm{w}} = \{(x, S(x) \mid x \in D(S)\}.$$

L'application S a de plus les propriétés suivantes :

(i) $D(S)$ ainsi que $S(D(S))$ sont σ-faiblement dense dans M.

(ii) S est injective.

(iii) Si $x, y \in D(S)$ alors $xy \in D(S)$ et $S(xy) = S(y)S(x)$.

(iv) Si $x \in D(S)$ alors $S(x)^* \in D(S)$ et $S(S(x)^*)^* = x$.

Bien que l'antipode soit non-bornée et donc assez compliquée à manipuler, il est possible d'en obtenir une version qui se comporte mieux via une sorte de décomposition polaire. Elle est notée R et est appelée antipode unitaire. Ses propriétés principales sont énoncées dans la proposition suivante.

Proposition 1.6. *L'application $R : M \to M$ possède les propriétés suivantes :*

(i) R est une isométrie qui commute avec l'involution.

(ii) R est antimultiplicative (ce qui implique que $R(1) = 1$).

(iii) R est un anticomorphisme : $\Delta R = \sigma(R \otimes R)\Delta$.

(iv) $R^2 = \iota$.

(v) $SR = RS$.

Avant d'expliquer en quoi sont utiles les antipodes S et R, mentionnons que si (M, Δ) est un groupe quantique localement compact, (M, Δ) admet de nombreux objets (opérateurs non bornés, sous-groupe à un paramètre d'automorphismes, constantes) caractérisant sa structure. Ils correspondent notamment à la fonction modulaire ou la conjugaison complexe et proviennent des poids n.s.f. via la théorie de Tomita-Takesaki. Cette théorie étant très technique, nous n'en parlerons que brièvement dans la Section 3 consacrée à la dualité ainsi que dans la Section 5. C'est notamment via cette théorie qu'il est possible de construire nos applications S et R ou même l'opérateur J dont nous aurons besoin à la Section 1.4. Pour plus de précisions sur cette théorie, nous renvoyons au livre de M. Takesaki [7].

Revenons-en aux antipodes S et R. L'antipode unitaire R nous permet notamment de faire un choix canonique pour ψ une fois qu'un choix pour φ a été fait. En effet, si $x \in M^+$, on a $R(x) \in M^+$ car R est un automorphisme. L'application φR est donc bien définie et il est clair que c'est un poids sur M. L'injectivité de R garantit que ce poids est fidèle tandis que son caractère semi-fini provient du fait que $\mathcal{M}_{\varphi R} = R^{-1}(\mathcal{M}_\varphi) = R(\mathcal{M}_\varphi)$ est σ-faiblement dense dans M car bijectivité et σ-faible continuité de R. De plus, φR est normal car R étant un $*$-morphisme σ-faiblement continu, elle conserve l'ordre et les bornes supérieures d'où

$$\varphi R(\sup_i x_i) = \varphi(\sup_i R(x_i)) = \sup_i \varphi R(x_i)$$

pour toute suite généralisée croissante bornée $(x_i)_{i \in I}$ de M_+.
Enfin, si $x \in \mathcal{M}_{\varphi R}$ et $\omega \in M_*^+$, on a $R(x) \in R(\mathcal{M}_{\varphi R}) = \mathcal{M}_{\varphi R}$ et $\omega R \in M_*^+$ (car R préserve l'ordre et est σ-faiblement continu) donc on peut appliquer l'invariance à gauche de φ à ωR et on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi R(x)\omega(1) &= \varphi(R(x))\omega R(1) \\
&= \varphi((\omega R \otimes \iota)\Delta(R(x))) \\
&= \varphi((\omega R \otimes \iota)\sigma(R \otimes R)\Delta(x)) \\
&= \varphi((\iota \otimes \omega R)(R \otimes R)\Delta(x)) \\
&= \varphi((R \otimes \omega)\Delta(x)) \\
&= \varphi(R((\iota \otimes \omega)\Delta(x))) \\
&= \varphi R((\iota \otimes \omega)\Delta(x))
\end{aligned}$$

d'où φR est invariant à droite.
Ainsi, φR est un poids n.s.f. invariant à droite et on peut donc faire le choix canonique $\psi = \varphi R$. Insistons tout

de même sur le fait que l'existence de l'antipode unitaire repose sur l'existence des deux poids invariants. On ne peut donc pas alléger la définition de groupe quantique en n'imposant que l'existence d'un poids invariant à gauche puis en démontrant l'existence d'un poids invariant à droite via l'antipode unitaire.

1.4 Les groupes quantiques opposé et commutant

Étant donné un groupe quantique $(M, \Delta, \varphi, \psi)$, il est possible de produire deux autres groupes quantiques en tordant légèrement sa structure. La première construction consiste simplement à renverser la comultiplication. En effet, en posant $\Delta^{\text{op}} = \sigma\Delta$ où σ désigne la volte sur $M \otimes M$ définie par

$$\sigma(x \otimes y) = y \otimes x \quad \forall x, y \in M,$$

il est clair que Δ^{op} est également un $*$-morphisme unifère σ-faiblement continu et on a de plus

$$\begin{aligned}
(\Delta^{\text{op}} \otimes \iota)\Delta^{\text{op}} &= (\sigma\Delta \otimes \iota)\sigma\Delta \\
&= (\sigma \otimes \iota)(\Delta \otimes \iota)\sigma\Delta \\
&= (\sigma \otimes \iota)(\iota \otimes \sigma)(\sigma \otimes \iota)(\iota \otimes \Delta)\Delta \\
&= (\sigma \otimes \iota)(\iota \otimes \sigma)(\sigma \otimes \iota)(\Delta \otimes \iota)\Delta \\
&= (\iota \otimes \Delta^{\text{op}})\sigma\Delta \\
&= (\iota \otimes \Delta^{\text{op}})\Delta^{\text{op}}
\end{aligned}$$

donc Δ^{op} est une comultiplication sur M. De plus, l'invariance à gauche et à droite de φ et ψ impliquent que

$$\varphi((\iota \otimes \omega)\Delta^{\text{op}}(x)) = \varphi((\iota \otimes \omega)\sigma\Delta(x)) = \varphi((\omega \otimes \iota)\Delta(x)) = \varphi(x)1, \quad \forall x \in \mathcal{M}_\varphi^+, \forall \omega \in M_*^+$$

$$\psi((\omega \otimes \iota)\Delta^{\text{op}}(x)) = \psi((\iota \otimes \omega)\sigma\Delta(x)) = \psi((\iota \otimes \omega)\Delta(x)) = \psi(x)1, \quad \forall x \in \mathcal{M}_\psi^+, \forall \omega \in M_*^+$$

donc φ est un poids invariant à droite pour (M, Δ^{op}) et ψ est un poids invariant à gauche pour Δ^{op}. On a donc démontré le résultat suivant.

Proposition 1.7. *Si $(M, \Delta, \varphi, \psi)$ est un groupe quantique, le quadruplet $(M, \Delta^{\text{op}}, \psi, \varphi)$ est également un groupe quantique localement compact. On l'appelle groupe quantique opposé de $(M, \Delta, \varphi, \psi)$ et on le notera $(M, \Delta, \varphi, \psi)^{\text{op}}$ ou $(M, \Delta)^{\text{op}}$ pour y référer.*

On dira qu'un groupe quantique est cocommutatif si et seulement si $\Delta = \Delta^{\text{op}}$.

La deuxième construction, elle, consiste à remplacer l'algèbre de von Neumann sous-jacente par son commutant [1] tout en gardant la comultiplication et les poids n.s.f.. Le pont entre M et M' est obtenu via la théorie de Tomita-Takesaki. En effet, elle ne permet d'obtenir, à partir du poids φ, une isométrie [2] antilinéaire involutive $J : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ vérifiant $JMJ = M'$. On peut donc poser

$$\Delta'(x) = (J \otimes J)\Delta(JxJ)(J \otimes J), \quad \forall x \in M'$$

$$\varphi'(x) = \varphi(JxJ), \quad \forall x \in (M')^+$$

$$\psi'(x) = \psi(JxJ), \quad \forall x \in (M')^+.$$

Par transport de structure, on obtient le résultat suivant.

Proposition 1.8. *Le quadruplet $(M', \Delta', \varphi', \psi')$ est un groupe quantique localement compact. On l'appelle groupe quantique commutant de $(M, \Delta, \varphi, \psi)$ et on le notera $(M, \Delta, \varphi, \psi)'$ ou $(M, \Delta)'$.*

Nous verrons à la Section 3 que ces deux constructions sont en fait duales l'une de l'autre en un certain sens.

1. Qui est également une algèbre de von Neumann.
2. L'opérateur J est appelé conjugaison modulaire.

2 Groupes quantiques associés à un groupe topologique localement compact

Dans toute cette section, on fixe G un groupe topologique localement compact de loi notée multiplicativement et d'élément neutre e que l'on munit d'une mesure de Haar invariante à gauche μ. On supposera également ce groupe à base dénombrable. Cette hypothèse nous fournit 3 simplifications techniques :

— $L^2(G)$ est séparable.

— Nous pouvons manipuler la topologie de G via des suites et non des suites généralisées.

— G est σ-compact et l'espace mesuré ainsi obtenu est donc σ-fini.

Remarquons que si G vérifie ces hypothèses alors $G \times G$ muni de la topologie produit aussi. De tels exemples de groupes sont donnés par les groupes matriciels classiques que ce soit sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ (ou même sur n'importe quel corps local non archimédien, commutatif ou non).

Dans la première partie, nous avons tenté de donner la définition d'un groupe quantique localement compact en généralisant les structures de $L^\infty(G)$ offertes par G. Il y a en fait deux approches naturelles afin de construire un groupe quantique à partir du groupe G :

- Les opérateurs de multiplication par $L^\infty(G)$ sur $L^2(G)$.
- Les opérateurs de translation par G sur $L^2(G)$.

Dans cette partie, nous allons étudier ces approches et démontrer deux résultats principaux :

- Ces deux approches aboutissent bien à des groupe quantique au sens des algèbres de von Neumann.
- La deuxième approche peut également être réalisée va les opérateurs de convolution par $L^1(G)$ sur $L^2(G)$, c'est le Théorème 2.9.

2.1 Le groupe quantique $L^\infty(G)$

On considère l'espace vectoriel $L^\infty(G)$ des classes d'équivalence pour l'égalité presque partout de fonctions mesurables essentiellement bornées que l'on munit de sa structure de C^*-algèbre usuelle, c'est-à-dire de la norme du supremum essentiel et de l'involution $f^* = \overline{f}$. On l'identifiera tout au long de cette section à son image par l'application

$$m : \begin{array}{ccc} L^\infty(G) & \to & \mathcal{B}(L^2(G)) \\ f & \mapsto & [m_f : g \mapsto fg] \end{array} .$$

Cette identification est justifiée par le théorème suivant.

Théorème 2.1. *L'application m est un $*$-morphisme isométrique.*

Démonstration.
Il est clair que m est un $*$-morphisme. Montrons que c'est une isométrie. Soit $f \in L^\infty(G)$ non nulle. Pour tout $g \in L^2(G)$, on a

$$\begin{aligned} \left\|m_f(g)\right\|_2 &= \sqrt{\int_G |fg|^2 \mathrm{d}\mu} \\ &\leq \sqrt{\int_G \|f\|_\infty^2 |g|^2 \mathrm{d}\mu} \\ &= \|f\|_\infty \|g\|_2 \end{aligned}$$

d'où $\left\|m_f\right\|_{\mathrm{op}} \leq \|f\|_\infty$.

Soit $0 < \varepsilon \leq \|f\|_\infty$. Il existe un borélien $X \subset G$ de mesure finie (car G est σ-fini) non nulle tel que

$$\mathbb{1}_X f \geq \mathbb{1}_X (\|f\|_\infty - \varepsilon).$$

On a alors

$$\begin{aligned} \left\|m_f(\mathbb{1}_X)\right\|_2 &= \sqrt{\int_X |f|^2 \mathrm{d}\mu} \\ &\geq \sqrt{\int_X (\|f\|_\infty - \varepsilon)^2 \mathrm{d}\mu} \\ &= (\|f\|_\infty - \varepsilon)\sqrt{\mu(X)} \\ &= (\|f\|_\infty - \varepsilon)\|\mathbb{1}_X\|_2 \end{aligned}$$

d'où $\|m_f\|_{\text{op}} \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$. En faisant tendre ε vers 0, on obtient $\|m_f\|_{\text{op}} \geq \|f\|_\infty$.
Finalement, $\|m_f\|_{\text{op}} = \|f\|_\infty$ d'où m est une isométrie. □

Nous allons maintenant montrer que $L^\infty(G)$ est une algèbre de von Neumann.

Proposition 2.2. *$m(L^\infty(G))$ est égal à son commutant dans $\mathcal{B}(L^2(G))$. En particulier, $m(L^\infty(G))$ est σ-faiblement fermé dans $\mathcal{B}(L^2(G))$.*

Démonstration.

L'algèbre $L^\infty(G)$ étant commutative, on a $m(L^\infty(G)) \subset m(L^\infty(G))'$. Il suffit donc de montrer l'inclusion réciproque. Soit donc $T \in m(L^\infty(G))'$. G étant σ-fini, il existe une partition $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de G composée de boréliens de mesure finie non nulle de G. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = T(\mathbb{1}_{B_n}) \in L^2(G)$. Fixons $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\mathbb{1}_{B_n} T_n = m_{\mathbb{1}_{B_n}} T(\mathbb{1}_{B_n}) = T m_{\mathbb{1}_{B_n}}(\mathbb{1}_{B_n}) = T(\mathbb{1}_{B_n}) = T_n$$

donc T_n est essentiellement supportée dans B_n.
Supposons que $\|T_n\|_\infty > \|T\|_{\text{op}}$. Il existe alors un borélien $X \subset G$ de mesure finie non nulle tel que $|T_n| > \|T\|_{\text{op}}$ sur X. T_n étant supporté essentiellement sur B_n, on a $X \subset B_n$. Posons $g = \dfrac{1}{T_n}\mathbb{1}_X \in L^\infty(G) \cap L^2(G)$. On a

$$\mu(X) = \|T_n g\|_2^2 = \left\|T(\mathbb{1}_{B_n} g)\right\|_2^2 = \|T(g)\|_2^2 \leq \|T\|_{\text{op}}^2 \|g\|_2^2 < \|T\|_{\text{op}}^2 \frac{\mu(X)}{\|T\|_{\text{op}}^2} = \mu(X)$$

ce qui est absurde. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|T_n\|_\infty \leq \|T\|_{\text{op}}$.
Considérons $T_G = \sum_{n\geq 0} T_n$. On a $\|T_G\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_\infty \leq \|T\|_{\text{op}}$ d'où $T_G \in L^\infty(G)$.
Pour tous $f, g \in L^2(G) \cap L^\infty(G)$, on a

$$\begin{aligned}
\int_G T(f)\overline{g}\,\mathrm{d}\mu &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{B_n} T(f)\overline{g}\,\mathrm{d}\mu \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_G T_n f\overline{g}\,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_G T_G(f\overline{g})\,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_G m_{T_G}(f)\overline{g}\,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

La première égalité est justifiée par le théorème de convergence dominée, la deuxième provient de fait que T commute avec les $\mathbb{1}_{B_n}$ ainsi qu'avec f et la troisième est due à l'intégrabilité de $T_G f\overline{g}$ en vertu du fait que $T_G \in L^\infty(G)$. $L^\infty(G) \cap L^2(G)$ étant dense dans $L^2(G)$ pour la topologie normique, l'égalité $\int_G T(f)\overline{g}\,\mathrm{d}\mu = \int_G m_{T_G}(f)\overline{g}\,\mathrm{d}\mu$ a lieu pour tous $f, g \in L^2(G)$. Ainsi, pour tout $f \in L^2(G)$, on a $T(f) = m_{T_G}(f)$ d'où $T = m_{T_G} \in m(L^\infty(G))$ et il suit que $m(L^\infty(G))' = L^\infty(G)$. □

En remarquant que $\mathrm{id}_{L^2(G)} = m_{\mathbb{1}} \in m(L^\infty(G))$, on obtient le théorème suivant.

Théorème 2.3. *Si G est un groupe topologique localement compact et à base dénombrable, $L^\infty(G)$ est une algèbre de von Neumann sur $L^2(G)$.*

On munit $L^\infty(G)$ de l'application $\Delta : \begin{array}{ccc} L^\infty(G) & \to & L^\infty(G\times G) \\ f & \mapsto & [(x,y) \mapsto f(xy)] \end{array}$. Pour que Δ soit une comultiplication sur l'algèbre de von Neumann $L^\infty(G)$, il faudrait qu'elle soit à valeur dans le produit tensoriel $L^\infty(G) \otimes L^\infty(G)$. Ce problème est à la fois conceptuellement assez facile et technique à résoudre : il faut montrer qu'on peut interpréter $L^\infty(G\times G)$ comme le produit tensoriel $L^\infty(G) \otimes L^\infty(G)$. Nous renvoyons pour cette construction à l'Annexe C.
Le diagramme de coassociativité pour Δ devient alors le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} L^\infty(G) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & L^\infty(G\times G) \arrow[d, "\Delta\otimes\iota"] \\ L^\infty(G\times G) \arrow[r, "\iota\otimes\Delta"'] & L^\infty(G\times G\times G) \end{tikzcd}$$

Celui-ci est bien vérifié par Δ, il traduit l'associativité de la loi de G :

$$(\forall F \in L^\infty(G))(\forall (x,y,z)\in G^3),\ (\Delta\otimes\iota)\Delta(F)(x,y,z) = \Delta(F)(xy,z) = F(xyz) = \Delta(F)(x,yz) = (\iota\otimes\Delta)\Delta(F)(x,y,z)$$

Proposition 2.4. *Δ est un morphisme d'algèbres involutives unifères σ-faiblement continu.*

Démonstration.

Montrons premièrement que Δ est un morphisme d'algèbres involutives unifères.

$$\begin{aligned} (\forall f,g\in L^\infty(G))(\forall\alpha\in\mathbb{C})(\forall(x,y)\in G^2),\quad & \Delta(\alpha f+g)(x,y) = \alpha f(xy)+g(xy) = (\alpha\Delta(f)+\Delta(g))(x,y) \\ (\forall f,g\in L^\infty(G))(\forall(x,y)\in G^2),\quad & \Delta(fg)(x,y) = f(xy)g(xy) = \Delta(f)\Delta(g)(x,y) \\ (\forall f\in L^\infty(G))(\forall(x,y)\in G^2),\quad & \Delta(f)^*(x,y) = \overline{f(xy)} = \Delta(f^*)(x,y) \\ (\forall(x,y)\in G^2),\quad & \Delta(\mathbb{1}_G)(x,y) = \mathbb{1}_G(xy) = 1 = \mathbb{1}_{G\times G}(x,y) \end{aligned}$$

Montrons désormais que Δ est σ-faiblement continue. Soit $(f_i)_{i\in I}\in L^\infty(G)^I$ une suite généralisée convergeant σ-faiblement vers $f\in L^\infty(G)$. Soient $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}\in L^2(G\times G)^{\mathbb{N}}$ deux familles de carré sommable. On a

$$\begin{aligned} \sum_n \langle\Delta(f_i-f)\eta_n|\xi_n\rangle &= \sum_n \int_{G\times G} (f_i(xy)-f(xy))\eta_n(x,y)\overline{\xi_n(x,y)}\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu)\,(x,y) \\ &= \sum_n \int_{G\times G} (f_i(x)-f(x))\eta(x,x^{-1}y)\overline{\xi(x,x^{-1}y)}\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu)\,(x,y) \\ &= \sum_n \int_G (f_i(x)-f(x))\int_G \eta_n(x,x^{-1}y)\overline{\xi_n(x,x^{-1}y)}\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x). \end{aligned}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, le théorème de Fubini nous assure que l'application

$$\Psi_n : x\mapsto \int_G \eta_n(x,x^{-1}y)\overline{\xi_n(x,x^{-1}y)}\mathrm{d}\mu(y)$$

est définie presque partout. On pose alors les deux suites $(\psi_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}, (\psi_{n,2})_{n\in\mathbb{N}}\in L^2(G)^{\mathbb{N}}$ définies par

$$\psi_{n,1} = \sqrt{|\Psi_n|} \qquad \text{et} \qquad \psi_{n,2} = \mathbb{1}_{\{\Psi_n\neq 0\}}\frac{\overline{\Psi_n}}{\sqrt{|\Psi_n|}}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \sum_n \|\psi_{n,1}\|_2^2 &= \sum_n \int_G \left|\int_G \eta_n(x,x^{-1}y)\overline{\xi_n(x,x^{-1}y)}\mathrm{d}\mu(y)\right|\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \sum_n \int_G \left|\int_G \eta_n(x,y)\overline{\xi_n(x,y)}\mathrm{d}\mu(y)\right|\mathrm{d}\mu(x) \\ &\le \sum_n \langle|\eta_n||\xi_n|\rangle \\ &\le \sum_n \|\eta_n\|_2\|\xi_n\|_2 \\ &\le \left(\sum_n\|\eta_n\|_2^2\right)\left(\sum_n\|\xi_n\|_2^2\right) \\ &< +\infty \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_n \left\|\psi_{n,2}\right\|_2^2 &= \sum_n \left\||\psi_{n,2}|\right\|_2^2 \\ &= \sum_n \left\|\psi_{n,1}\right\|_2^2 \\ &< +\infty\end{aligned}$$

d'où par convergence σ-faible de $(f_i)_{i\in I}$ vers f

$$\begin{aligned}\sum_n \langle \Delta(f_i - f)\eta_n | \xi_n\rangle &= \sum_n \int_G (f_i(x) - f(x))\Psi_n(x)\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \sum_n \int_G (f_i(x) - f(x))\psi_{n,1}(x)\overline{\psi_{n,2}(x)}\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \sum_n \left\langle (f_i - f)\psi_{n,1} \middle| \psi_{n,2}\right\rangle \\ &\xrightarrow[i\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Ainsi, Δ est σ-faiblement continue sur $L^\infty(G)$. □

Pour finir la construction de notre premier groupe quantique, nous devons munir $L^\infty(G)$ des poids invariants. Le cône positif de $L^\infty(G)$ étant précisément $L^\infty(G)^+ = \{f \in L^\infty(G) \mid f \geq 0\}$, on pose

$$\varphi : \begin{array}{ccc} L^\infty(G)^+ & \to & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x) \end{array} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{array}{ccc} L^\infty(G)^+ & \to & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_G f(x^{-1})\mathrm{d}\mu(x) \end{array}.$$

Nous allons montrer en détails que φ est bien un poids n.s.f. mais nous ne le ferons pas pour φ car la preuve est presque identique [1].
L'intégrale des fonctions mesurables positives étant additive et positivement homogène, φ l'est et φ est donc un poids sur $L^\infty(G)$. Montrons que ce poids est n.s.f..

- Si $(f_\alpha)_\alpha$ est une suite généralisée croissante et bornée de $L^\infty(G)^+$ et si f désigne sa borne supérieure, $(f_\alpha)_\alpha$ converge σ-faiblement vers f. La topologie σ-faible étant métrisable sur les parties bornées, il existe une sous-suite $(f_n)_n$ de $(f_\alpha)_\alpha$ qui converge σ-faiblement vers f. G étant σ-compact, il existe une suite croissante $(K_n)_n$ de compacts de G telle que $\bigcup_n K_n = G$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la convergence σ-faible de (f_n) implique que pour tout $m \in \mathbb{N}$,

  $$\lim_\alpha \varphi(f_\alpha) \geq \lim_n \varphi(f_n) = \lim_n \int_G f_n \mathrm{d}\mu \geq \lim_n \int_G \mathbb{1}_{K_m} f_n \mathrm{d}\mu = \int_G \mathbb{1}_{K_m} f \mathrm{d}\mu.$$

  En faisant tendre m vers l'infini, le théorème de Beppo-Levi nous donne

  $$\lim_\alpha \varphi(f_\alpha) \geq \int_G f\mathrm{d}\mu = \varphi(f).$$

  Comme $f \geq f_\alpha$ pour tout α, on a également

  $$\lim_\alpha \varphi(f_\alpha) \leq \varphi(f),$$

  d'où $\lim_\alpha \varphi(f_\alpha) = \varphi(f)$ et donc φ est normal.
- Soit $f \in L^\infty(G)$. G étant σ-compact, il existe une suite croissante (K_n) de compacts de G telle que $\bigcup_n K_n = G$. Par le théorème de convergence dominée, la suite $(f\mathbb{1}_{K_n})_n \in (L^\infty(G) \cap L^1(G))^{\mathbb{N}}$ converge fortement vers f. $(f\mathbb{1}_{K_n})_n$ étant bornée [2], elle converge également σ-fortement vers f et donc σ-faiblement aussi. Ainsi, $\mathcal{M}_\varphi = L^\infty(G) \cap L^1(G)$ est σ-faiblement dense dans $L^\infty(G)$ et φ est semi-fini.
- Si $f \in L^\infty(G)^+$ vérifie $f \neq 0$ alors il existe $\varepsilon > 0$ et un borélien $A \subset G$ de mesure non nulle tel que $f \geq \varepsilon$ sur A et on a donc $\varphi(f) \geq \varepsilon\mu(A) > 0$. Par contraposée, si $\varphi(f) = 0$ alors $f = 0$ d'où φ est fidèle.

1. Il suffit d'adapter certains arguments faisant intervenir l'invariance à gauche de μ.
2. Rappelons que la topologie σ-forte coïncide avec la topologie forte sur les ensembles bornés et idem pour les topologies σ-faible et faible.

- Si $\xi, \eta \in \ell^2(\mathbb{N}, L^2(G))$ alors pour tout $f \in \mathcal{M}_\varphi^+$ l'invariance à gauche de μ implique que

$$\begin{aligned}\varphi((\omega_{\xi,\eta} \otimes \iota)\Delta(f)) &= \sum_{n\geq 0} \int_G \int_G f(xy)\xi_n(x)\overline{\eta_n(x)}\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y) \\ &= \sum_{n\geq 0} \int_G \int_G f(y)\xi_n(x)\overline{\eta_n(x)}\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y) \\ &= \sum_{n\geq 0} \int_G \xi_n(x)\overline{\eta_n(x)}\mathrm{d}\mu(x) \int_G f(y)\mathrm{d}\mu(y) \\ &= \omega_{\xi,\eta}(1)\varphi(f)\end{aligned}$$

  donc φ est invariant à gauche.

Théorème 2.5. *Si G est un groupe topologique localement compact à base dénombrable, $(L^\infty(G), \Delta, \varphi, \psi)$ est un groupe quantique localement compact.*

La multiplication dans $L^\infty(G)$ correspondant à la multiplication dans $\mathbb{C}$, le groupe quantique $L^\infty(G)$ est toujours commutatif et comme la multiplication de $L^\infty(G)$ correspond à la multiplication dans G, $L^\infty(G)$ est cocommutatif si et seulement si G est abélien et on a $(L^\infty(G), \Delta)^{\mathrm{op}} = (L^\infty(G^{\mathrm{op}}), \Delta)$.

2.2 Le groupe quantique $W^*(G)$

Nous allons maintenant construire un groupe quantique localement compact à partir des opérateurs de translation par G sur $L^2(G)$. La mesure de Haar sur G étant invariante à gauche, si $x \in G$ et $f \in L^2(G)$, on a $\displaystyle\int_G |f(x^{-1}y)|^2\mathrm{d}\mu(y) = \int_G |f(y)|^2\mathrm{d}\mu(y)$. On peut donc poser pour $x \in G$, l'application

$$\lambda_x : \begin{array}{ccc} L^2(G) & \to & L^2(G) \\ f & \mapsto & [y \mapsto f(x^{-1}y)] \end{array}$$

de sorte que λ_x soit unitaire : c'est la représentation régulière gauche de G. Remarquons d'une part que $\mathrm{id}_{L^2(G)} = \lambda_e$ et d'autre part $\lambda_x^* = \lambda_{x^{-1}}$ pour tout $x \in G$, ce qui signifie que $\mathrm{Vect}(\lambda(G))$ est une sous-algèbre involutive de $\mathcal{B}(L^2(G))$.

Définition 2.6. *Si G est un groupe topologique localement compact, on pose $W^*(G)$ l'adhérence de* $\mathrm{Vect}(\lambda(G))$ *pour la topologie σ-faible. C'est l'algèbre de von Neumann engendrée par G.*

Avant de munir $W^*(G)$ d'une structure de bigèbre de von Neumann, nous allons montrer que $W^*(G)$ coïncide avec l'algèbre de von Neumann engendrée par les opérateurs de convolution par $L^1(G)$ sur $L^2(G)$.
Rappelons que $L^1(G)$ muni du produit de convolution défini par

$$f * g(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)\mathrm{d}\mu(y), \quad \forall f, g \in L^1(G)$$

et de l'involution définie par [1] $f^* = \overline{\check{f}}\delta_G^{-1}$ est une algèbre de Banach involutive et que l'application

$$\lambda : \begin{array}{ccc} L^1(G) & \to & \mathcal{B}(L^2(G)) \\ f & \mapsto & \lambda(f) = [g \mapsto f * g] \end{array}$$

est un morphisme continu d'algèbres de Banach involutives.

Lemme 2.7. *On a $\lambda(L^1(G)) \subset W^*(G)$.*

Démonstration.

Considérons tout d'abord le cas où $f \in C_c(G)$.
D'après le Lemme B.5, l'application $F : \begin{array}{ccc} G & \to & \mathcal{B}(L^2(G)) \\ x & \mapsto & f(x)\lambda_x \end{array}$ est continue et donc mesurable. De plus, la

1. Nous noterons δ_G pour la fonction modulaire de G (voir Théorème B.3) et $\check{f} = [x \mapsto f(x^{-1})]$.

compacité de son support et sa continuité impliquent que son image est compacte et donc séparable étant donné que $\mathcal{B}(L^2(G))$ est un espace métrique. Enfin, $\mathcal{B}(L^2(G))$ est un espace de Banach et on a

$$\int_G \|f(x)\lambda_x\|_{\mathrm{op}}\mathrm{d}\mu(x) = \int_G |f(x)|\mathrm{d}\mu(x) = \|f\|_1 < +\infty$$

donc on va pouvoir interpréter $\lambda(f)$ comme l'intégrale de Bochner $\int_G f(x)\lambda_x\mathrm{d}\mu(x)$. En effet, si $g \in L^2(G)$, l'application $\mathrm{ev}_g : \begin{array}{ccc} \mathcal{B}(L^2(G)) & \to & L^2(G) \\ T & \mapsto & Tg \end{array}$ est linéaire continue à valeurs dans un Banach donc par le Théorème D.1, on a

$$\left(\int_G f(x)\lambda_x\mathrm{d}\mu(x)\right)(g) = \mathrm{ev}_g\left(\int_G f(x)\lambda_x\mathrm{d}\mu(x)\right) = \int_G f(x)\lambda_x g\mathrm{d}\mu(x).$$

Il suffit donc de montrer que $\int_G f(x)\lambda_x g\mathrm{d}\mu(x) = f * g$ pour tout $g \in L^2(G)$. Soit $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une unité approchée de $L^1(G)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $h \in L^2(G)$, l'application $\delta_n * h$ est continue donc il est possible de l'évaluer en tout $y \in G$. De plus, on a

$$\begin{aligned}
|\delta_n * h(y)| &\leq \int_G |\delta_n(x)h(x^{-1}y)|\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_G |\delta_n(yx)h(x^{-1})|\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_G |\delta_n(yx^{-1})\delta_G(x^{-1})h(x)|\mathrm{d}\mu(x) \\
&\leq \left\|\widetilde{\lambda_{y^{-1}}\delta_n\widetilde{\delta_G}}\right\|_2 \|h\|_2
\end{aligned}$$

pour tout $y \in G$ donc la forme linéaire $h \mapsto \delta_n * h(y)$ est continue et de nouveau par le Théorème D.1, on a

$$\begin{aligned}
\left(\delta_n * \int_G f(x)\lambda_x g\mathrm{d}\mu(x)\right)(y) &= \int_G f(x)\delta_n * (\lambda_x g)(y)\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_G f(x)\delta_n(z)g(x^{-1}z^{-1}y)\mathrm{d}\mu(z)\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_G \delta_n(z)f * g(z^{-1}y)\mathrm{d}\mu(z) \\
&= \delta_n * f * g(y).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\delta_n * \left(\int_G f(x)\lambda_x g\mathrm{d}\mu(x)\right) = \delta_n * f * g$ et ce, pour tout $n \in \mathbb{N}$. En faisant tendre n vers l'infini, on obtient alors l'égalité $\int_G f(x)\lambda_x g\mathrm{d}\mu(x) = f * g$ pour tout $g \in \mathcal{B}(L^2(G))$ et donc $\lambda(f) = \int_G f(x)\lambda_x\mathrm{d}\mu(x)$.
Par le Corollaire D.3, on a alors

$$\lambda(f) = \int_G f(x)\lambda_x\mathrm{d}\mu(x) \in \overline{\mathrm{Vect}(F(G))}^{\|\cdot\|_{\mathrm{op}}} \subset \overline{\mathrm{Vect}(\lambda(G))}^{\|\cdot\|_{\mathrm{op}}} \subset \overline{\mathrm{Vect}(\lambda(G))}^{\sigma-\mathrm{w}} = W^*(G).$$

Soit maintenant $f \in L^1(G)$. Il existe une suite généralisée $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ de fonctions continues à supports compacts qui converge vers f pour la topologie normique. L'application $f \mapsto \lambda(f)$ étant norme-continue, la suite généralisée $(\lambda(f_\alpha))_{\alpha\in I}$ converge vers $\lambda(f)$ pour la topologie normique et donc σ-faiblement. Or, cette suite généralisée est à valeurs dans $W^*(G)$ et $W^*(G)$ est par définition fermé pour la topologie σ-faible donc on en déduit que $\lambda(f) \in W^*(G)$. □

Lemme 2.8. *Soit $f \in L^2(G)$ et soit $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une unité approchée de $L^1(G)$. On a $\delta_n * f \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_2} f$. Autrement dit, $(\lambda(\delta_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une unité approchée de $\mathcal{B}(L^2(G))$.*

Démonstration.

Considérons tout d'abord le cas où $f \in C_c(G)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\delta_n * f$ est continue donc il est possible de l'évaluer en tout $y \in G$. Soit donc $y \in G$ et soit $\varepsilon > 0$. f étant continue, il existe un voisinage symétrique V

de e tel que pour tout $x \in yV$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. La suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une unité approchée, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\text{supp}(\delta_n) \subset V$. Pour tout $n \geq N$, on a donc

$$|\delta_n * f(y) - f(y)| \leq \int_G \delta_n(x)|f(x^{-1}y) - f(y)|\mathrm{d}\mu(x) = \int_V \delta_n(x)|f(x^{-1}y) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, $\delta_n * f \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu-\text{p.p.}} f$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\delta_n * f$ est à support dans

$$\text{supp}(\delta_n)\text{supp}(f) \subset \text{supp}(\delta_0)\text{supp}(f) \triangleq K$$

qui est compact d'après le Lemme B.6. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in G$, on a

$$\begin{aligned}|\delta_n * f(x)| &= \mathbb{1}_K(x)\left|\int_G \delta_n(y)f(y^{-1}x)\mathrm{d}\mu(y)\right| \\ &\leq \mathbb{1}_K(x)\int_G \delta_n(y)|f(y^{-1}x)|\mathrm{d}\mu(y) \\ &\leq \mathbb{1}_K(x)\|f\|_\infty \int_G \delta_n(y)\mathrm{d}\mu(y) \\ &= \|f\|_\infty \mathbb{1}_K(x)\end{aligned}$$

et la fonction $\|f\|_\infty \mathbb{1}_K$ est de carré intégrable car K est compact et donc de mesure finie. Finalement, par le théorème de convergence dominée, on a bien $\delta_n * f \xrightarrow[n\to+\infty]{\|.\|_2} f$.

Soit maintenant $f \in L^2(G)$ et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $P \in C_c(G)$ tel que $\|f - P\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors

$$\|f - \delta_n * f\|_2 \leq \|f - P\|_2 + \|P - \delta_n * P\|_2 + \|\delta_n * P - \delta_n * f\|_2 \leq \frac{2}{3}\varepsilon + \|\delta_n * P - P\|_2.$$

Or, d'après ce qui précède, la suite généralisée $(\delta_n * P)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers P en norme $\|.\|_2$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$ alors $\|\delta_n * P - P\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Pour tout $n \geq N$, on a donc $\|f - \delta_n * f\|_2 \leq \varepsilon$ d'où $(\delta_n * f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f en norme. □

Théorème 2.9. *L'algèbre de von Neumann $W^*(G)$ coïncide avec l'algèbre de von Neumann engendrée par les opérateurs de convolution $(\lambda(f))_{f\in L^1(G)}$, i.e. l'adhérence σ-faible de $\lambda(L^1(G)) \subset \mathcal{B}(L^2(G))$.*

Démonstration.

Posons E l'algèbre de von Neumann engendrée par les opérateurs de convolution par $L^1(G)$. D'après le Lemme 2.7, on a $\{\lambda(f) \mid f \in L^1(G)\} \subset W^*(G)$ donc $E \subset W^*(G)$.

Réciproquement, fixons $g \in G$ ainsi qu'une unité approchée $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^1(G)$. D'après le Lemme 2.8, pour tout $f \in L^2(G)$, on a $\delta_n * f \xrightarrow[n\to+\infty]{\|.\|_2} f$. Par continuité de λ_g, on a aussi $\lambda_g(\delta_n * f) \xrightarrow[n\to+\infty]{\|.\|_2} \lambda_g f$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lambda_g(\delta_n * f) = (\lambda_g\delta_n) * f = \lambda(\lambda_g\delta_n)(f)$. Autrement dit, la suite d'opérateurs $(\lambda(\lambda_g\delta_n))$ converge fortement vers λ_g. Cette suite étant bornée, elle converge également σ-fortement et donc σ-faiblement vers λ_g d'où $\lambda_g \in E$ et $W^*(G) \subset E$. □

Nous allons maintenant munir $W^*(G)$ d'une comultiplication. Pour cela, il faut de nouveau représenter le produit tensoriel $W^*(G) \otimes W^*(G)$ plus concrètement. On injecte une fois de plus le produit tensoriel algébrique $W^*(G) \odot W^*(G)$ dans $\mathcal{B}(L^2(G \times G))$ via l'application définie par $\begin{array}{ccc} W^*(G) \odot W^*(G) & \to & \mathcal{B}(L^2(G \times G)) \\ A \otimes B & \mapsto & [\xi \otimes \eta \mapsto A\xi \otimes B\eta] \end{array}$.

Proposition 2.10. *On a $W^*(G \times G) = W^*(G) \otimes W^*(G)$.*

Démonstration.

Si $(x, y) \in G \times G$, on a $\lambda_{(g,h)} = \lambda_g \otimes \lambda_h$ donc $W^*(G) \otimes W^*(G)$ est une algèbre de von Neumann contenant les opérateurs de translation par $G \times G$ d'où $W^*(G \times G) \subset W^*(G) \otimes W^*(G)$.
Réciproquement, si $S, T \in W^*(G)$, il existe des suites généralisées $(S_i)_{i\in I}, (T_j)_{j\in J} \in \text{Vect}(\lambda(\text{G}))$ qui convergent σ-faiblement vers S et T respectivement. Montrons que $S \otimes T \in W^*(G \times G)$. D'après le Lemme A.9, pour tout j, la suite généralisée $(S_i \otimes T_j)_{i\in I}$ converge σ-faiblement vers $S \otimes T_j$ et comme $W^*(G \times G)$ est σ-faiblement fermé, $S \otimes T_j \in W^*(G \times G)$ pour tout j. Similairement, par le Lemme A.9, la suite généralisée $(S \otimes T_j)_{j\in J}$ converge σ-faiblement vers $S \otimes T$ et comme $W^*(G \times G)$ est σ-faiblement fermé, on a $S \otimes T \in W^*(G \times G)$. Ainsi, $W^*(G \times G)$ est une algèbre de von Neumann qui contient $W^*(G) \odot W^*(G)$ d'où $W^*(G \times G) \supset W^*(G) \otimes W^*(G)$.
Finalement, on a bien $W^*(G \times G) = W^*(G) \otimes W^*(G)$. □

On pose $\hat{\Delta}: \begin{array}{ccc} \lambda(G) & \to & W^*(G)\otimes W^*(G) \\ \lambda_g & \mapsto & \lambda_g \otimes \lambda_g \end{array}$.

Lemme 2.11. *La famille $(\lambda_x)_{x\in G}$ est libre dans $\mathcal{B}(L^2(G))$.*

Démonstration.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1,\dots,x_n \in G$ et $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_{x_k} = 0$. Supposons qu'il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\alpha_i \neq 0$. Quitte à permuter les indices, on peut supposer que $i = 1$. G étant séparé, il existe des ouverts $U_2,\dots,U_n$ contenant x_1 et des ouverts $O_2,\dots,O_n$ contenant respectivement $x_2,\dots,x_n$ tels que $U_k \cap O_k = \emptyset$ pour tout $k \in [\![2,n]\!]$. G étant un groupe topologique, on peut supposer qu'il existe un ouvert V de G tel que pour tout $k \in [\![2,n]\!]$, $U_k = x_1 V$ et $O_k = x_k V$. G étant localement compact, on peut également supposer V relativement compact et donc de mesure finie. Considérons $f = \mathbb{1}_V \in L^2(G)$. On a

$$0 = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_{x_k}\right)(f)(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_{x_k} \mathbb{1}_V = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{x_k V}$$

d'où

$$0 = \int_{x_1 V} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{x_k V} \mathrm{d}\mu = \alpha_1 \mu(x_1 V).$$

Or, V est ouvert donc $\mu(x_1V) = \mu(V) \neq 0$ et $\alpha_1 = 0$, ce qui est absurde. Ainsi, $\alpha_k = 0$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ et la famille $(\lambda_x)_{x\in G}$ est libre. □

On peut donc prolonger $\hat{\Delta}$ par linéarité à $\mathrm{Vect}(\lambda(G))$ et même à $W^*(G)$.

Proposition 2.12. *L'application $\hat{\Delta}$ se prolonge en un $*$-morphisme unifère σ-faiblement continu et coassociatif de $W^*(G)$ dans $W^*(G)\otimes W^*(G)$. On a plus précisément pour tout $T \in W^*(G)$*

$$\hat{\Delta}(T) = \mathrm{Ad}_U(T\otimes 1) \text{ où } U : \begin{array}{ccc} L^2(G\times G) & \to & L^2(G\times G) \\ F & \mapsto & [(x,y)\mapsto F(x,x^{-1}y)] \end{array} \in \mathcal{U}(L^2(G\times G)).$$

On a également la formule explicite

$$\hat{\Delta}(\lambda(f)) = \int_G f(x)(\lambda_x\otimes\lambda_x)\mathrm{d}\mu(x), \qquad \forall f \in L^1(G).$$

Démonstration.

Montrons tout d'abord que $\hat{\Delta}$ peut bien se prolonger σ-faiblement continûment à $W^*(G)$.
L'application $T \mapsto U(T\otimes 1)U^*\Sigma$ étant la composée $\mathrm{Ad}_W \pi$ où $\pi : T \mapsto T\otimes 1$, les Lemmes A.10 et A.9 nous permettent de conclure qu'elle est σ-faiblement continue.
Considérons la restriction Γ de $\mathrm{Ad}_U\pi$ à $W^*(G)$. Pour tous $F \in C_c(G\times G)$ et $x,y,g \in G$, on a

$$\begin{aligned} U(\lambda_g\otimes 1)U^*F(x,y) &= (\lambda_g\otimes 1)U^*F(x,x^{-1}y) \\ &= U^*F(g^{-1}x,x^{-1}y) \\ &= F(g^{-1}x,g^{-1}y) \\ &= (\lambda_g\otimes\lambda_g)F(x,y) \end{aligned}$$

donc par densité de $C_c(G\times G)$ dans $L^2(G\times G)$, $U(\lambda_g\otimes 1)U^* = (\lambda_g\otimes\lambda_g)$ pour tout $g \in G$. On a donc $\Gamma(\lambda(G)) \subset W^*(G)\otimes W^*(G)$ et Γ est σ-faiblement continue donc

$$\Gamma(W^*(G)) = \Gamma\left(\overline{\lambda(G)}^{\sigma-\mathrm{w}}\right) \subset \overline{\Gamma(\lambda(G))}^{\sigma-\mathrm{w}} \subset \overline{W^*(G)\otimes W^*(G)}^{\sigma-\mathrm{w}} = W^*(G)\otimes W^*(G)$$

d'où Γ se corestreint à $W^*(G)\otimes W^*(G)$. De plus, ce calcul implique que Γ coïncide avec $\hat{\Delta}$ sur $\lambda(G)$ d'où Γ un prolongement σ-faiblement continu de $\hat{\Delta}$ à $W^*(G)$ et c'est bien le seul prolongement σ-continu possible car $\lambda(G)$ est σ-faiblement dense dans $W^*(G)$.

Considérons $f \in L^1(G)$, $F \in C_c(G)$ et $x, y \in G$. On a

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}(\lambda(f)) &= U(\lambda(f) \otimes 1)U^* F(x,y) \\ &= (\lambda(f) \otimes 1)U^* F(x, x^{-1}y) \\ &= \int_G f(z) U^* F(z^{-1}x, x^{-1}y) \mathrm{d}\mu(z) \\ &= \int_G f(z) F(z^{-1}x, z^{-1}y) \mathrm{d}\mu(z) \\ &= \int_G f(z)(\lambda_z \otimes \lambda_z) F(x,y) \mathrm{d}\mu(z)\end{aligned}$$

d'où

$$\hat{\Delta}(\lambda(f)) = \int_G f(z)(\lambda_z \otimes \lambda_z) \mathrm{d}\mu(z).$$

Montrons maintenant que $\hat{\Delta}$ est un $*$-morphisme unifère coassociatif. Par σ-faible densité, il suffit de montrer les propriétés pour $\hat{\Delta}_{|\mathrm{Vect}(\lambda(G))}$. De plus, $\hat{\Delta}$ est linéaire donc il suffit de démontrer les propriétés sur la base $(\lambda_x)_{x \in G}$ de $\mathrm{Vect}(\lambda(G))$:

$$(\forall x, y \in G), \hat{\Delta}(\lambda_x \lambda_y) = \hat{\Delta}(\lambda_{xy}) = \lambda_{xy} \otimes \lambda_{xy} = (\lambda_x \lambda_y) \otimes (\lambda_x \lambda_y) = (\lambda_x \otimes \lambda_x)(\lambda_y \otimes \lambda_y) = \hat{\Delta}(\lambda_x)\hat{\Delta}(\lambda_y)$$

$$(\forall x \in G), \hat{\Delta}(\lambda_x)^* = (\lambda_x \otimes \lambda_x)^* = (\lambda_x^*) \otimes (\lambda_x^*) = \lambda_{x^{-1}} \otimes \lambda_{x^{-1}} = \hat{\Delta}(\lambda_{x^{-1}}) = \hat{\Delta}(\lambda_x^*)$$

$$\hat{\Delta}(\mathrm{id}_{L^2(G)}) = \hat{\Delta}(\lambda_e) = \lambda_e \otimes \lambda_e = \mathrm{id}_{L^2(G)} \otimes \mathrm{id}_{L^2(G)}$$

$$(\forall x \in G), (\iota \otimes \hat{\Delta})\hat{\Delta}(\lambda_x) = (\iota \otimes \hat{\Delta})(\lambda_x \otimes \lambda_x) = \lambda_x \otimes \lambda_x \otimes \lambda_x = (\hat{\Delta} \otimes \iota)(\lambda_x \otimes \lambda_x) = (\hat{\Delta} \otimes \iota)\hat{\Delta}(\lambda_x).$$

□

Finissons la construction de notre second groupe quantique en le munissant des poids n.s.f. invariants. $W^*(G)$ pouvait être obtenu à partir de $L^1(G)$, il est naturel de vouloir poser quelque chose comme

$$\hat{\varphi} : \begin{array}{ccc} W^*(G)^+ & \to & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ T & \mapsto & \begin{cases} \|f\|_2^2 \text{ s'il existe } f \in L^2(G) \text{ telle} \\ \text{que } \lambda(f) \in \mathcal{B}(L^2(G)) \text{ et } T = \lambda(f^* * f) \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases} \end{array}.$$

Cependant, l'additivité d'une telle formule n'est pas évidente car bien que $\|f\|_2^2 = f^* * f(e)$ (qui a un sens car $L^2(G) * L^2(G) \subset C(G)$), il est a priori possible d'avoir $\lambda(f) + T = \lambda(g)$ avec $f, g \in L^2(G)$ et $T \notin \lambda(L^1(G))$.

Il est tout de même possible via la théorie de Tomita-Takesaki de construire un poids n.s.f. invariant $\hat{\varphi}$ caractérisé par

$$L^1(G) \cap L^2(G) \subset \mathcal{N}_{\hat{\varphi}} \qquad \text{et} \qquad \hat{\varphi}(\lambda(f)^*\lambda(f)) = \|f\|_2^2, \quad \forall f \in L^1(G) \cap L^2(G).$$

Ce poids est appelé poids de Plancherel, en analogie avec la mesure de Plancherel sur le dual d'un groupe abélien localement compact.
Nous allons montrer que $\hat{\varphi}$ est invariant à gauche et à droite.
Considérons $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Si $\xi, \eta \in \ell^2(\mathbb{N}, L^2(G))$, on a pour tous $g_1, g_2 \in L^2(G)$:

$$\begin{aligned}\left\langle (\iota \otimes \omega_{\xi,\eta})(\hat{\Delta}(\lambda(f)^*\lambda(f)))g_1 \middle| g_2 \right\rangle &= \sum_{n \geq 0} \left\langle \hat{\Delta}(\lambda(f)^*\lambda(f))(g_1 \otimes \xi_n) \middle| g_2 \otimes \eta_n \right\rangle \\ &= \sum_{n \geq 0} \int_{G \times G} \hat{\Delta}(\lambda(f)^*\lambda(f))(g_1 \otimes \xi_n)(x,y)\overline{g_2(x)\eta(y)}\, \mathrm{d}(\mu \otimes \mu)\,(x,y) \\ &= \sum_{n \geq 0} \int_G \int_G \int_G (f^* * f)(z) g_1(z^{-1}x)\xi_n(z^{-1}y)\mathrm{d}z\, \overline{g_2(x)\eta_n(y)} \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\ &= \int_G \int_G (f^* * f)(z) \sum_{n \geq 0} \int_G \xi_n(z^{-1}y)\overline{\eta_n(y)} \mathrm{d}y\, g_1(z^{-1}x) \mathrm{d}z\, \overline{g_2(x)} \mathrm{d}x \\ &= \int_G \int_G (f^* * f)(z)\Psi(z) g_1(z^{-1}x)\mathrm{d}z \overline{g_2(x)} \mathrm{d}x \\ &= \langle \lambda((f^* * f)\Psi)(g_1) | g_2 \rangle\end{aligned}$$

où

$$\Psi(z) = \sum_{n\geq 0} \int_G \xi_n(z^{-1}y)\overline{\eta_n(y)}\mathrm{d}y \in L^\infty(G) \text{ par Cauchy-Schwarz.}$$

Ainsi, on a $(\iota \otimes \omega)_{\xi,\eta}(\hat{\Delta}(\lambda(f)^*\lambda(f))) = \lambda((f^* * f)\Psi)$ et donc

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}((\iota \otimes \omega_{\xi,\eta})(\hat{\Delta}(\lambda(f)^*\lambda(f)))) &= (f^* * f)(e)\Psi(e) \\
&= \hat{\varphi}(\lambda(f)^*\lambda(f)) \sum_{n\geq 0} \int_G \xi_n(y)\overline{\eta_n(y)}\mathrm{d}y \\
&= \hat{\varphi}(\lambda(f)^*\lambda(f))\omega_{\xi,\eta}(1)
\end{aligned}$$

d'où $\hat{\varphi}$ est invariant à droite.
De même, on a

$$\begin{aligned}
\left\langle (\omega_{\xi,\eta} \otimes \iota)(\hat{\Delta}(\lambda(f)^*\lambda(f)))g_1 \middle| g_2 \right\rangle &= \sum_{n\geq 0} \left\langle \hat{\Delta}(\lambda(f)^*\lambda(f))(\xi_n \otimes g_1) \middle| \eta_n \otimes g_2 \right\rangle \\
&= \sum_{n\geq 0} \int_{G\times G} \hat{\Delta}(\lambda(f)^*\lambda(f))(\xi_n \otimes g_1)\overline{\eta_n(x)g_2(y)}\, \mathrm{d}(\mu\otimes\mu)\,(x,y) \\
&= \sum_{n\geq 0} \int_G \int_G \int_G (f^* * f)(z)\xi_n(z^{-1}x)g_1(z^{-1}y)\mathrm{d}z\, \overline{\eta_n(x)g_2(y)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_G \int_G (f^* * f)(z) \sum_{n\geq 0} \int_G \xi_n(z^{-1}x)\overline{\eta_n(x)}\mathrm{d}x\, g_1(z^{-1}y)\mathrm{d}z\, \overline{g_2(y)}\mathrm{d}y \\
&= \int_G \int_G (f^* * f)(z)\Gamma(z)g_1(z^{-1}y)\mathrm{d}z\, \overline{g_2(y)}\mathrm{d}y \\
&= \langle (\lambda((f^* * f)\Gamma)(g_1)|g_2\rangle
\end{aligned}$$

où

$$\Gamma(z) = \sum_{n\geq 0} \int_G \xi_n(z^{-1}x)\overline{\eta_n(x)}\mathrm{d}x.$$

Ainsi, on a $(\omega_{\xi,\eta} \otimes \iota)(\hat{\Delta}(\lambda(f)^*\lambda(f))) = \lambda((f^* * f)\Gamma)$ et donc

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}((\omega_{\xi,\eta} \otimes \iota)(\hat{\Delta}(\lambda(f)^*\lambda(f)))) &= (f^* * f)(e)\Gamma(e) \\
&= \hat{\varphi}(\lambda(f)^*\lambda(f)) \sum_{n\geq 0} \int_G \xi_n(x)\overline{\eta_n(x)}\mathrm{d}x \\
&= \hat{\varphi}(\lambda(f)^*\lambda(f))\omega_{\xi,\eta}(1)
\end{aligned}$$

d'où $\hat{\varphi}$ est également invariant à gauche.

Théorème 2.13. *Si G est un groupe topologique localement compact à base dénombrable, $(W^*(G), \hat{\Delta}, \hat{\varphi}, \hat{\varphi})$ est un groupe quantique localement compact.*

Nous avons ici décidé d'utiliser les opérateurs de translation par G sur $L^2(G)$ à gauche mais il nous aurait tout à fait été possible de considérer les opérateurs de translation à droite. On aurait ainsi obtenu un autre groupe quantique $W^*(G)_{\mathrm{bis}}$ très similaire à $W^*(G)$ avec essentiellement la même comultiplication et les mêmes poids invariants. Il est en fait possible de montrer que $W^*(G)_{\mathrm{bis}}$ est le groupe quantique commutant de $W^*(G)$.

Remarquons également que comme la comultiplication de $W^*(G)$ correspond à l'injection diagonale de $W^*(G)$ dans $W^*(G\times G)$, $W^*(G)$ est cocommutatif tandis que sa multiplication correspond à la multiplication dans G et donc, $W^*(G)$ est commutatif si et seulement si G l'est.

3 Dualité

3.1 Dualité des groupes quantiques localement compacts

Dans cette section, nous allons voir comment construire un groupe quantique localement compact à partir d'un autre. Nous allons également voir en quoi cette construction généralise la dualité de Pontryagin pour les groupes abéliens localement compacts. La construction étant très technique, nous ne feront que citer les résultats et les observer dans le cas des groupes quantiques construits dans la section précédente. Pour plus de précision sur cette construction, nous renvoyons au papier [4] de Kustermans et Vaes.

Considérons un groupe quantique localement compact $(M, \Delta, \varphi, \psi)$. On fixe une construction GNS $(\mathscr{H}, \Lambda, \pi)$ pour φ. La beauté de la construction du dual d'un groupe quantique réside dans le fait qu'elle entièrement contenue dans un seul opérateur.

Définition 3.1. *On définit un unitaire W sur $\mathscr{H}\hat{\otimes}\mathscr{H}$ par $W^*(\Lambda(x) \otimes \Lambda(y)) = (\Lambda \otimes \Lambda)(\Delta(y)(x \otimes 1))$ pour tous $x, y \in \mathcal{N}_\varphi$.*

La propriété essentielle de l'unitaire W est qu'il vérifie l'équation pentagonale [1] $W_{12}W_{13}W_{23} = W_{23}W_{12}$ sur $\mathscr{H}\hat{\otimes}\mathscr{H}\hat{\otimes}\mathscr{H}$. On dit alors que W est un unitaire multiplicatif. Il permet notamment de retrouver la structure de bigèbre de M.

Théorème 3.2. *On a*

$$M = \overline{\{(\iota \otimes \omega)(W) \mid \omega \in \mathcal{B}(\mathscr{H})_*\}}^{\sigma-\mathrm{w}}$$

et pour tout $x \in M$, on a

$$\Delta(x) = W^*(1 \otimes x)W.$$

Enfin, W permet également de retrouver l'antipode de M via le résultat ci-dessous.

Proposition 3.3. *L'antipode S de M est caractérisée par les propriétés suivantes :*

(i) Pour tout $\omega \in \mathcal{B}(\mathscr{H})_*$, $(\iota \otimes \omega)(W) \in D(S)$.

(ii) L'ensemble $C = \{(\iota \otimes \omega)(W) \mid \omega \in \mathcal{B}(\mathscr{H})_*\}$ forme un coeur pour S et la topologie σ-faible au sens suivant :

$$\overline{\{(x, S(x)) \mid x \in C\}}^{\sigma-\mathrm{w}} = \{(x, S(x)) \mid x \in D(S)\}$$

(iii) Pour tout $\omega \in \mathcal{B}(\mathscr{H})_*$, $S((\iota \otimes \omega)(W) = (\iota \otimes \omega)(W^*)$.

La construction du groupe quantique dual de M se fait en exploitant l'asymétrie de l'égalité ensembliste du théorème précédent. On pose ainsi

$$\hat{M} = \overline{\{(\omega \otimes \iota)(W) \mid \omega \in \mathcal{B}(\mathscr{H})_*\}}^{\sigma-\mathrm{w}}$$

que l'on munit de la comultiplication définie pour tout $x \in \hat{M}$ par

$$\hat{\Delta}(x) = \Sigma W(x \otimes 1)W^*\Sigma$$

où Σ désigne la volte sur $\mathscr{H}\hat{\otimes}\mathscr{H}$ définie par

$$\Sigma(x \otimes y) = y \otimes x \quad \forall x, y \in \mathscr{H}.$$

On a alors $W \in M \otimes \hat{M}$ et donc l'égalité plus satisfaisante [2]

$$\hat{M} = \overline{\{(\omega \otimes \iota)(W) \mid \omega \in M_*\}}^{\sigma-\mathrm{w}}$$

On veut ensuite munir $\hat{M}$ d'un poids n.s.f. $\hat{\varphi}$ invariant à gauche. Cette construction technique utilise la théorie de Tomita-Takesaki et plus précisément la notion d'algèbre de Hilbert. L'idée est la suivante :
On considère l'ensemble

$$\mathcal{J}_\varphi = \{y \in \hat{M} \mid \exists\omega \in M_*, \exists\xi(\omega) \in \mathscr{H}, y = (\omega \otimes \iota)(W) \text{ et } \forall x \in \mathcal{N}_\varphi, \omega(x^*) = \langle\xi(\omega)|\Lambda(x)\rangle\}.$$

Si $y \in \mathcal{J}_\varphi$, les éléments ω et $\xi(\omega)$ correspondants sont alors uniques et on pose $\xi = \hat{\Lambda}(y)$. On munit ensuite $\mathcal{J}_\varphi \cap \mathcal{J}_\varphi^*$ d'une structure d'algèbre de Hilbert dont la complétion est $\mathscr{H}$ et dont l'algèbre de von Neumann correspondante est $\hat{M}$. On en déduit l'existence d'un poids n.s.f. invariant à gauche $\hat{\varphi}$ sur $\hat{M}$ tel que

1. Si A est un opérateur défini sur un produit tensoriel $E \otimes E$, on définit l'opérateur $A_{12} par A\otimes$. Similairement, si $n \geq 3$, on définit les opérateurs A_{ij} avec $1 \leq i \neq j \leq n$ comment étant l'opérateur défini sur $E^{\otimes n}$ agissant sur les copies i et j de E selon l'opérateur A est agissant comme l'identité sur les autres copies de E.
2. On préfère toujours des formules intrinsèques à M et n'utilisant pas l'espace de Hilbert sur lequel M est représentée.

— la construction GNS de $\hat{\varphi}$ puisse se faire sur $\mathscr{H}$ via la fermeture de $\hat{\Lambda}$.

— $\mathcal{J}_\varphi$ soit un coeur pour la fermeture de $\hat{\Lambda}$.

Finalement, il nous faut construire un poids invariant à droite pour $(\hat{M}, \hat{\Delta})$. Pour cela, on construit en fait ce qui sera l'antipode unitaire de $\hat{M}$ par la formule

$$\hat{R}((\omega \otimes \iota))(W) = ((\omega R) \otimes \iota)(W), \qquad \forall \omega \in M_*.$$

L'application $\hat{R}$ se prolonge alors en une isométrie antimultiplicative de $\hat{M}$ qui commute avec l'involution. De plus, $\hat{R}$ est un anticomorphisme dans le sens où $\hat{\Delta}\hat{R} = \sigma(\hat{R} \otimes \hat{R})\hat{\Delta}$ donc en posant

$$\hat{\psi} = \hat{\varphi}\hat{R}$$

on définit un poids invariant à droite sur $\hat{M}$ comme on l'a vu à la Section 1.3.

Le quadruplet $(\hat{M}, \hat{\Delta}, \hat{\varphi}, \hat{\psi})$ est alors un groupe quantique localement compact et son antipode unitaire coïncide avec $\hat{R}$. On peut donc réitérer ce procédé, obtenir un unitaire multiplicatif $\widehat{W}$ et un groupe quantique localement compact $(\hat{\hat{M}}, \hat{\hat{\Delta}}, \hat{\hat{\varphi}}, \hat{\hat{\psi}})$. Les unitaires W et $\widehat{W}$ sont alors reliés par l'égalité $\widehat{W} = \Sigma W^* \Sigma$ et on a le résultat suivant.

Théorème 3.4 (Dualité de Pontryagin)**.** *Le groupe quantique $(\hat{\hat{M}}, \hat{\hat{\Delta}}, \hat{\hat{\varphi}}, \hat{\hat{\psi}})$ coïncide avec $(M, \Delta, \varphi, \psi)$.*

Remarquons on a ici égalité stricte entre un groupe quantique et son dual et non un isomorphisme canonique comme dans le cas de la dualité de Pontryagin des groupes abéliens localement compacts. Cela est notamment dû au fait qu'on suppose que l'algèbre de von Neumann sous-jacente est représentée sur l'espace GNS associé à son poids invariant à gauche. Sans cette convention, le bidual de G serait donné par $\pi_\varphi(G)$ et l'application π_φ serait l'isomorphisme canonique entre G et $\hat{\hat{G}}$.

La construction du groupe quantique dual permet notamment de mettre en relation les deux constructions introduites à la Section 1.4. En effet, si $(M, \Delta, \varphi, \psi)$ est un groupe quantique localement compact, le foncteur de dualité échange le commutant et le groupe quantique opposé :

$$M'^{\wedge} = M^{\wedge \mathrm{op}} \qquad \text{et} \qquad M^{\mathrm{op}\wedge} = M^{\wedge\prime}$$

où on a noté $\hat{}$ pour le dual.

Avant de voir en quoi le Théorème 3.4 constitue bien une généralisation de la dualité de Pontryagin, nous allons voir en utilisant des techniques plus élémentaires que les deux groupes groupes quantiques $(L^\infty(G), \Delta)$ et $(W^*(G), \hat{\Delta})$ sont duaux l'un de l'autre.

3.2 Dualité $L^\infty(G)$-$W^*(G)$

Commençons par calculer les unitaires multiplicatifs de $L^\infty(G)$ et $W^*(G)$. Nous les noterons W_1 et W_2 respectivement. Pour éviter toute confusion, nous noterons également $\tilde{\Delta}$ pour la comultiplication sur $W^*(G)$ que nous avons définie à la Section 2.2 et $\tilde{\varphi}$ pour le poids de Plancherel tandis que nous noterons $\hat{\Delta}$ pour la comultiplication duale de Δ et $\hat{\varphi}$ pour le poids dual de φ. Nous réutiliserons les notations introduites dans la Section 2.2 après les avoir justifiées via le Théorème 3.8.

Proposition 3.5. *Les unitaires multiplicatifs de $L^\infty(G)$ et $W^*(G)$ sont donnés par*

$$W_1 : \begin{array}{ccc} L^2(G \times G) & \to & L^2(G \times G) \\ F & \mapsto & [(x, y) \mapsto F(x, x^{-1}y)] \end{array}, \qquad W_2 : \begin{array}{ccc} L^2(G \times G) & \to & L^2(G \times G) \\ F & \mapsto & [(x, y) \mapsto F(yx, y)] \end{array}.$$

Démonstration.

- Soient $f, g \in L^\infty(G) \cap L^2(G)$. Pour tous $x, y \in G$, on a

$$W_1^*(f \otimes g)(x, y) = g(xy)f(x) = f(x)g(xy) = (f \otimes g)(x, xy).$$

Par densité de $(L^\infty(G) \cap L^2(G)) \odot (L^\infty(G) \cap L^2(G))$ dans $L^2(G)\hat{\otimes}L^2(G)$, on a donc $W_1^* F(x, y) = F(x, xy)$ pour tout $F \in L^2(G \times G)$ et tous $x, y \in G$. W_1 étant une isométrie, on a $W_1 = (W_1^*)^{-1}$ d'où clairement $W_1 F(x, y) = F(x, x^{-1}y)$ pour tout $F \in L^2(G \times G)$ et tous $x, y \in G$.

- Soient $f, g \in C_c(G)$. Pour tout $F \in L^2(G\times G)$ et tous $x, y \in G$, on a
$$\begin{aligned}(\tilde{\Delta}(\lambda(g))(\lambda(f)\otimes 1)F(x,y) &= \int_G g(z)(\lambda(f)\otimes 1)F(z^{-1}x, z^{-1}y)\mathrm{d}\mu(z)\\ &= \int_{G\times G} g(z)f(t)F(t^{-1}z^{-1}x, z^{-1}y)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu)\,(z,t)\\ &= \int_{G\times G} f(t^{-1}z)g(t)F(z^{-1}x, t^{-1}y)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu)\,(z,t)\\ &= m_h F(x,y)\end{aligned}$$
où $h : (z,t) \mapsto f(t^{-1}z)g(t)$. Ainsi, $W_2^*(f\otimes g)(z,t) = h(z,t) = f(t^{-1}z)g(t)$ pour presque tous $z, t \in G$. Par densité de $C_c(G)\odot C_c(G)$ dans $L^2(G\times G)$, on a donc $W_2^*F(x,y) = F(y^{-1}x, y)$ pour tout $F \in L^2(G\times G)$ et presque tous $x, y \in G$. W_2 étant une isométrie, on a $W_2 = (W_2^*)^{-1}$ d'où clairement $W_2F(x,y) = F(yx, y)$ pour tout $F \in L^2(G\times G)$.

$\square$

Remarquons que c'est l'unitaire W_2 qui nous a permis de prolonger $\tilde{\Delta}$ à $W^*(G)$.
Montrons tout d'abord que la structure de bigèbre de von Neumann du dual de $L^\infty(G)$ coïncide avec celle de $W^*(G)$.
Si $\psi_1, \psi_2 \in L^2(G)$, on pose $\omega_{\psi_1,\psi_2} : \begin{array}{ccc}\mathcal{B}(L^2(G)) & \to & \mathbb{C}\\ A & \mapsto & \langle A\psi_1|\psi_2\rangle\end{array}$.

Lemme 3.6.

On a
$$W^*(G) = \overline{\left\{\omega\otimes\iota\,(W_1)\mid \omega\in\mathcal{B}(L^2(G))_*\right\}}^{\sigma-\mathrm{w}}$$
et
$$W_2 = \Sigma W_1^*\Sigma.$$

Démonstration.

Soient $\psi_1, \psi_2 \in L^2(G)$. Pour tous $f, g \in L^2(G)$, on a
$$\begin{aligned}\left\langle \omega_{\psi_1,\psi_2}\otimes\iota(W_1)f\middle|g\right\rangle &= \langle W_1(\psi_1\otimes f)|\psi_2\otimes g\rangle\\ &= \int_{G\times G}\psi_1(x)f(x^{-1}y)\overline{\psi_2(x)g(y)}\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu)\,(x,y)\\ &= \int_G\int_G \psi_1(x)\overline{\psi_2}(x)f(x^{-1}y)\mathrm{d}\mu(x)\overline{g(y)}\mathrm{d}\mu(y)\\ &= \left\langle\lambda(\psi_1\overline{\psi_2})f\middle|g\right\rangle\end{aligned}$$
d'où $\omega_{\psi_1,\psi_2}\otimes\iota(W_1) = \lambda(\psi_1\bar{\psi}_2)$. Comme $L^2(G)L^2(G) = L^1(G)$, l'ensemble $\overline{\left\{\omega\otimes\iota\,(W_1)\mid\omega\in\mathcal{B}(L^2(G))_*\right\}}^{\sigma-\mathrm{w}}$ contient $\lambda(L^1(G))$ et contient donc $W^*(G)$ d'après le Théorème 2.9. Soit réciproquement $\omega\in\mathcal{B}(L^2(G))_*$. Il existe deux suites $(\eta_n)_n, (\xi_n)_n \in L^2(G)^{\mathbb{N}}$ de carré sommable telles que $\omega = \sum_{n\geq 0}\omega_{\xi_n,\eta_n}$. Pour tout $T\in\mathcal{B}(L^2(G\times G))$, on a donc
$$\begin{aligned}\omega\otimes\iota(W) &= \sum_{n\geq 0}\omega_{\xi_n,\eta_n}\otimes\iota(W_1)\\ &= \sum_{n\geq 0}\lambda(\xi_n\bar{\eta}_n)\\ &= \lambda\left(\sum_{n\geq 0}\xi_n\bar{\eta}_n\right).\end{aligned}$$
Ainsi, $\omega\otimes\iota(W_1)\in W^*(G)$ et on a $\overline{\left\{\omega\otimes\iota\,(W_1)\mid\omega\in\mathcal{B}(L^2(G))_*\right\}}^{\sigma-\mathrm{w}} \subset W^*(G)$. D'où l'égalité des ensembles.

Pour tout $f\in L^2(G\times G)$, on a
$$\begin{aligned}\Sigma W_1^*\Sigma f(x,y) &= W_1^*\Sigma f(y,x)\\ &= \Sigma f(y, yx)\\ &= f(yx, y)\\ &= W_2 f(x,y)\end{aligned}$$

d'où $\Sigma W_1^* \Sigma = W_2$. □

L'égalité entre l'unitaire multiplicatif de $(W^*(G), \tilde{\Delta})$ et l'unitaire multiplicatif dual de $(L^\infty(G), \Delta)$, implique directement le corollaire suivant.

Corollaire 3.7. *L'application $\tilde{\Delta}$ coïncide avec la comultiplication duale de Δ :*

$$\tilde{\Delta}(T) = \Sigma W_1 (T \otimes 1) W_1^* \Sigma, \qquad \forall T \in W^*(G).$$

Montrons maintenant que $\hat{\varphi} = \tilde{\varphi}$. Commençons tout d'abord par déterminer l'ensemble $\mathcal{J}_\varphi$.
D'après la preuve de la proposition précédente, si $\omega \in L^\infty(G)_*$, il existe $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}, L^2(G))$ de carré sommable, telles que $\omega = \sum_n \omega_{\xi_n,\eta_n}$ et on a $(\omega \otimes \iota)(W_1) = \lambda(\sum_n \xi_n \bar{\eta}_n)$. De plus pour tout $f \in L^2(G)$ et tout $g \in \mathcal{N}_\varphi = L^\infty(G) \cap L^2(G)$, on a

$$\omega(g^*) = \langle f | g \rangle \iff \int_G \bar{g} \sum_n \xi_n \bar{\eta}_n \mathrm{d}\mu = \int_G f \bar{g} \mathrm{d}\mu.$$

Ainsi, on a $(\omega \otimes \iota)(W_1) \in \mathcal{J}_\varphi$ si et seulement si $\sum_n \xi_n \eta_n \in L^2(G)$ et on a alors $\hat{\Lambda}(\omega) = \sum_n \xi_n \bar{\eta}_n$ et

$$\hat{\varphi}\left(\lambda\left(\sum_n \xi_n \eta_n\right)^* \lambda\left(\sum_n \xi_n \eta_n\right)\right) = \left\| \sum_n \xi_n \eta_n \right\|_2^2 = \tilde{\varphi}\left(\lambda\left(\sum_n \xi_n \eta_n\right)^* \lambda\left(\sum_n \xi_n \eta_n\right)\right).$$

On a donc montré que $\hat{\varphi} = \tilde{\varphi}$.
On peut donc maintenant énoncer le théorème principal de cette section.

Théorème 3.8. *Les deux groupes quantiques localement compacts $L^\infty(G)$ et $W^*(G)$ sont le dual l'un de l'autre.*

Les notations définies à la Section 2.2 sont donc cohérentes avec la dualité des groupes quantiques, nous les utiliserons à partir de maintenant.
Nous allons maintenant voir en quoi cette dualité est une généralisation de la dualité de Pontryagin pour les groupes abéliens localement compacts. Rappelons que si G est un localement abélien compact, on peut définir son groupe duale $\hat{G} \triangleq \mathrm{Hom}(G, \mathbb{T})$ où $\mathbb{T} \subset \mathbb{C}^*$ désigne le cercle unité. $\hat{G}$ est alors abélien et on peut le munir d'une structure de groupe topologique localement compact à l'aide de la topologie compact-ouvert. On peut donc former le groupe abélien localement compact $\hat{\hat{G}} = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(G, \mathbb{T}), \mathbb{T})$ et le théorème du dualité de Pontryagin affirme alors que G est canoniquement isomorphe à $\hat{\hat{G}}$.

La façon la plus simple d'interpréter la dualité de Pontryagin des groupes abéliens localement compacts au niveau des groupes quantiques est d'utiliser la théorie C^*-algébrique des groupes quantiques. Dans cette autre formulation [1], la construction des groupes quantiques classiques se fait via la C^*-algèbre $C_0(G)$ à la place de $L^\infty(G)$ et via

$$C^*_{\mathrm{red}}(G) = \overline{L^1(G)}^{\|\cdot\|_{\mathrm{op}}} \subset \mathcal{B}(L^2(G))$$

à la place de $W^*(G)$ et on a également $\widehat{C_0(G)} = C^*_{\mathrm{red}}(G)$. Il est possible de montrer [2] que la transformée de Fourier peut se prolonger en un $*$-isomorphisme isométrique entre $C_0(\hat{G})$ et $C^*_{\mathrm{red}}(G)$. Ainsi, on a

$$\widehat{C_0(G)} = C^*_{\mathrm{red}}(G) \simeq C_0(\hat{G})$$

et le dual de Pontryagin correspond bien à un cas particulier du dual au sens des groupes quantiques.

Le lien entre la transformée de Fourier et la dualité est également visible via les unitaires multiplicatifs. Rappelons que le théorème de Plancherel affirme alors qu'il est possible de faire un choix pour la mesure de Haar sur $\hat{G}$ de sorte que la transformation de Fourier

$$\mathcal{F} : \begin{array}{ccc} L^1(G) & \to & C_0(\hat{G}) \\ f & \mapsto & \mathcal{F}(f) : \chi \mapsto \int_G f(x)\overline{\chi(x)}\mathrm{d}\mu(x) \end{array}$$

induise un isomorphisme isométrique $\mathcal{F} : L^2(G) \to L^2(\hat{G})$.

1. Quelques technicités supplémentaires apparaissent mais les résultats sont essentiellement les mêmes à la différence près qu'on ne considère pas la topologie σ-faible mais plutôt les topologies normiques et strictes.
2. Voir théorème 3.3.3 de [2].

En notant W et $\widehat{W}$ les unitaires multiplicatifs de $L^\infty(G)$ et $W^*(\hat{G})$, on a pour tout $F \in C_c(\hat{G}\times\hat{G}) \subset L^1(\hat{G})\cap L^2(\hat{G})$ et tous $\chi_1,\chi_2 \in \hat{G}$:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}\otimes\mathcal{F})W(\mathcal{F}^{-1}\otimes\mathcal{F}^{-1})F(\chi_1,\chi_2) &= \int_{G\times G} W(\mathcal{F}^{-1}\otimes\mathcal{F}^{-1})F(x,y)\overline{\chi_1}(x)\overline{\chi_2}(y)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu)\,(x,y)\\
&= \int_{G\times G} (\mathcal{F}^{-1}\otimes\mathcal{F}^{-1})F(x,x^{-1}y)\overline{\chi_1}(x)\overline{\chi_2}(y)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu)\,(x,y)\\
&= \int_{G\times G}\int_{\hat{G}\times\hat{G}} F(\chi_3,\chi_4)\chi_3(x)\chi_4(x^{-1}y)\overline{\chi_1}(x)\overline{\chi_2}(y)\,\mathrm{d}(\nu\otimes\nu)\,(\chi_3,\chi_4)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu)\,(x,y)\\
&= \int_{G\times G}\int_{\hat{G}\times\hat{G}} F(\chi_3,\chi_4)\chi_3(x)\chi_4(y)\overline{\chi_1}(x)\overline{\chi_2}(xy)\,\mathrm{d}(\nu\otimes\nu)\,(\chi_3,\chi_4)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu)\,(x,y)\\
&= \int_{G\times G}\int_{\hat{G}\times\hat{G}} F(\chi_3,\chi_4)\chi_3(x)\chi_4(y)\overline{\chi_1\chi_2}(x)\overline{\chi_2}(y)\,\mathrm{d}(\nu\otimes\nu)\,(\chi_3,\chi_4)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu)\,(x,y)\\
&= \int_{G\times G} (\mathcal{F}^{-1}\otimes\mathcal{F}^{-1})F(x,y)\overline{\chi_1\chi_2}(x)\overline{\chi_2}(y)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu)\,(x,y)\\
&= (\mathcal{F}\otimes\mathcal{F})(\mathcal{F}^{-1}\otimes\mathcal{F}^{-1})F(\chi_1\chi_2,\chi_2)\\
&= F(\chi_1\chi_2,\chi_2)\\
&= F(\chi_2\chi_1,\chi_2)\\
&= \widehat{W}F(\chi_1,\chi_2)
\end{aligned}$$

d'où $(\mathcal{F}\otimes\mathcal{F})W(\mathcal{F}^{-1}\otimes\mathcal{F}^{-1})F = \widehat{W}F$ pour tout $F\in C_c(\hat{G}\times\hat{G})$. Par densité de $C_c(\hat{G}\times\hat{G})$ dans $L^2(G\times G)$ pour la topologie normique, on a donc

$$(\mathcal{F}\otimes\mathcal{F})W(\mathcal{F}^{-1}\otimes\mathcal{F}^{-1}).$$

Ainsi, la dualité de Pontryagin peut-être comprise par le fait que les opérateurs W et $\widehat{W}$ sont unitairement équivalents, l'unitaire entrant en jeu étant la transformée de Fourier sur $G\times G$.

3.3 Calcul des antipodes de $L^\infty(G)$ et $W^*(G)$

Nous proposons dans cette section un rapide calcul des antipodes des groupes quantiques classiques grâce à la formule donnée à la Proposition 3.3. Pendant toute cette sous-section, nous noterons S, R, $\hat{S}$ et $\hat{R}$ les antipodes et antipodes unitaires de $L^\infty(G)$ et $W^*(G)$ respectivement [1]. Nous noterons également δ la fonction modulaire de G (voir Théorème B.3).
Intéressons tout d'abord à $L^\infty(G)$. Considérons $\xi,\eta\in\ell^2(\mathbb{N},L^2(G))$. On a d'une part pour tous $f,g\in L^2(G)$:

$$\begin{aligned}
\big\langle(\iota\otimes\omega_{\xi,\eta})(W)f\big|g\big\rangle &= \sum_{n\geq 0}\langle W(f\otimes\xi_n)|g\otimes\eta_n\rangle\\
&= \sum_{n\geq 0}\int_{G\times G} f(x)\xi_n(x^{-1}y)\overline{g(x)\eta_n(y)}\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu)\,(x,y)\\
&= \int_G f(x)\int_G\sum_{n\geq 0}\overline{\eta_n(y)}\check{\xi}_n(y^{-1}x)\mathrm{d}\mu(y)\overline{g(x)}\mathrm{d}\mu(x)\\
&= \langle m_\Psi f|g\rangle \qquad \text{avec } \Psi = \sum_{n\geq 0}\overline{\eta_n}*\check{\xi}_n
\end{aligned}$$

d'où $(\iota\otimes\omega_{\xi,\eta})(W) = m_\Psi$.
D'autre part, pour tous $f,g\in L^2(G)$

$$\begin{aligned}
\big\langle(\iota\otimes\omega_{\xi,\eta})(W^*)f\big|g\big\rangle &= \sum_{n\geq 0}\langle W(f\otimes\xi_n)|g\otimes\eta_n\rangle\\
&= \sum_{n\geq 0}\int_{G\times G} f(x)\xi_n(xy)\overline{g(x)\eta_n(y)}\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu)\,(x,y)\\
&= \int_G f(x)\sum_{n\geq 0}\int_G\overline{\eta_n(y)}\check{\xi}_n(y^{-1}x^{-1})\mathrm{d}\mu(y)\overline{g(x)}\mathrm{d}\mu(x)\\
&= \langle m_\Gamma f|g\rangle \ \text{ avec } \Gamma = \sum_{n\geq 0}\widetilde{\overline{\eta_n}*\check{\xi}_n}
\end{aligned}$$

d'où $(\iota\otimes\omega_{\xi,\eta})(W^*) = m_\Gamma$.
Ainsi, on a $S(m_\Psi) = m_\Gamma = m_{\check{\Psi}}$. En identifiant $L^\infty(G)$ et $m(L^\infty(G))$, S correspond donc bien à l'inversion de G.

1. Ces notations sont cohérentes avec la dualité $L^\infty(G) - W^*(G)$ établie dans la section précédente.

Comme mentionné à la Section 1.1, S possède déjà de très bonnes propriétés algébriques et de régularité. On a en fait l'égalité $S = R$.
Passons maintenant à $W^*(G)$. Si $\xi, \eta \in \ell^2(\mathbb{N}, L^2(G))$, on a pour tous $f, g \in L^2(G)$

$$\begin{aligned}
\left\langle (\iota \otimes \omega_{\xi,\eta})(\widehat{W}) f \middle| g \right\rangle &= \sum_{n\geq 0} \left\langle \widehat{W}(f \otimes \xi_n) \middle| g \otimes \eta_n \right\rangle \\
&= \sum_{n\geq 0} \int_{G\times G} f(yx)\xi_n(y)\overline{g(x)\eta_n(y)}\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu)(x,y) \\
&= \int_G \int_G \sum_{n\geq 0} \xi_n(y^{-1})\overline{\eta_n(y^{-1})} f(y^{-1}x)\delta^{-1}(y)\mathrm{d}\mu(y)\overline{g(x)}\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_G \int_G \sum_{n\geq 0} \check{\xi}_n(y)\check{\overline{\eta_n}}(y)\delta^{-1}(y) f(y^{-1}x)\mathrm{d}\mu(y)\overline{g(x)}\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \langle \lambda(\Psi) f | g \rangle \qquad \text{avec } \Psi = \sum_{n\geq 0} \check{\xi}_n \check{\overline{\eta_n}} \delta^{-1}
\end{aligned}$$

d'où $(\iota \otimes \omega_{\xi,\eta})(\widehat{W}) = \Psi$.
De plus, pour tous $f, g \in L^2(G)$, on a

$$\begin{aligned}
\left\langle (\iota \otimes \omega_{\xi,\eta})(\widehat{W}^*) f \middle| g \right\rangle &= \sum_{n\geq 0} \left\langle \widehat{W}^*(f \otimes \xi_n) \middle| g \otimes \eta_n \right\rangle \\
&= \sum_{n\geq 0} \int_{G\times G} f(y^{-1}x)\xi_n(y)\overline{g(x)\eta_n(y)}\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu)(x,y) \\
&= \int_G \int_G \sum_{n\geq 0} \xi_n(y)\overline{\eta_n(y)} f(y^{-1}x)\mathrm{d}\mu(y)\overline{g(x)}\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \langle \lambda(\Gamma) f | g \rangle \qquad \text{avec } \Gamma = \sum_{n\geq 0}\sum_{n\geq 0} \xi_n \overline{\eta_n}
\end{aligned}$$

d'où $(\iota \otimes \omega_{\xi,\eta})(\widehat{W}^*) = \lambda(\Gamma)$.
Ainsi, on a $\hat{S}(\lambda(\Psi)) = \lambda(\Gamma) = \lambda(\check{\Psi}\delta^{-1}) = J\lambda(\Psi)^*J$ où J est l'opérateur de conjugaison complexe [1] sur $L^2(G)$. Remarquons qu'ici aussi, l'antipode est une isométrie involutive qui commute avec l'involution, ce qui nous convainc que $\hat{S} = \hat{R}$. L'invariance du poids $\hat{\varphi}$ implique notamment que $\hat{\varphi}$ est invariant par l'antipode unitaire. En effet, si $f \in C_c(G)$, l'égalité $\hat{\varphi}\hat{R}(f) = \hat{\varphi}(f)$ correspond simplement au point *(iii)* du Théorème B.3.
Remarquons de plus que pour tout $x \in G$ et tout $f \in L^2(G)$, on a

$$S(\lambda_x) = J\lambda_x^* J f = \overline{\lambda_{x^{-1}}\overline{f}} = \lambda_{x^{-1}} f$$

d'où $\hat{S}(\lambda_x) = \lambda_{x^{-1}}$ et donc ici aussi, l'antipode correspond à l'inversion de G [2].

1. Dans le cadre de la théorie de Tomita-Takesaki, J correspond à la conjugaison modulaire du poids φ et la formule $\hat{S}(a) = Ja^*J$ est alors vraie en toute généralité.
2. Et donc aussi à l'inversion dans $\hat{G}$ si G est abélien étant donné la définition de l'inversion dans $\hat{G}$.

4 Coaction de groupes quantiques

Les groupes sont par nature faits pour agir sur d'autres ensembles, il est donc naturel de vouloir généraliser la notion d'action de groupes aux groupes quantiques. Dans le cadre des algèbres d'opérateurs les groupes agissent notamment sur des algèbres de von Neumann et il est possible à partir d'une telle action de produire une nouvelle algèbre de von Neumann contenant à la fois le groupe et l'algèbre de von Neumann initiale. Nous nous intéresserons à cette une généralisation de cette construction dans la Section 5.

Fixons pour toute cette section un groupe topologique localement compact G à base dénombrable. Posons m la multiplication de G, vu comme une application $G\times G$ dans G et e l'élément neutre de G. Pour faciliter la traduction, considérons une action mesurable (à gauche) de G sur un espace mesuré $(X,\mathcal{T},\nu)$. Nous noterons e_G l'élément neutre de G. On a donc une application $\Gamma : G\times X \mapsto X$ vérifiant les axiomes

$$\begin{array}{ll}(AM) & \forall g,h\in G, \forall x\in X, \Gamma(g,\Gamma(h,x)) = \Gamma(gh,x).\\ (EN) & \forall x\in X, \Gamma(e_G,x) = x.\end{array}$$

Il est tentant de poser l'application

$$\alpha : \begin{array}{ccc} L^\infty(X) & \to & L^\infty(G\times X)\\ f & \mapsto & [(g,x)\mapsto f(\Gamma(g,x))]\end{array}$$

mais pour que celle-ci ait un sens, il faut d'une part que Γ soit mesurable mais surtout que si f_1 et f_2 sont deux fonctions mesurables bornées de X égales presque partout alors $f_1\circ\Gamma = f_2\circ\Gamma$ presque partout. Or, on a

$$\{(g,x)\in G\times X \mid f_1\circ\Gamma(g,x)\neq f_2\circ\Gamma(g,x)\} = \Gamma^{-1}(\{x\in X\mid f_1(x)\neq f_2(x)\})$$

donc l'application α est bien définie si et seulement si Γ est mesurable et si l'image réciproque par Γ de tout ensemble de mesure nulle est un ensemble de mesure nulle. On dit alors que Γ est non singulière. Traduisons maintenant le fait que Γ soit une action de G sur X. L'évaluation partielle n'ayant pas de sens $L^\infty(G\times H)$, il est difficile[1] de traduire l'axiome (EN). L'axiome (AM) est lui beaucoup plus simple à traduire : pour tout $f\in L^\infty(X)$ on a

$$(\Delta\otimes\iota)\alpha f(g,h,x) = \alpha f(gh,x) = f(\Gamma(gh,x)) = f(\Gamma(g,\Gamma(h,x))) = (\iota\otimes\alpha)\alpha f(g,h,x)$$

d'où $(\Delta\otimes\iota)\alpha = (\iota\otimes\alpha)\alpha$.
Ceci motive la définition suivante.

Définition 4.1. *Soit (M,Δ) une bigèbre de von Neumann et N une algèbre de von Neumann.*
Une coaction à gauche de M sur N est un $*$-morphisme $\alpha : N\to M\otimes N$ unifère, σ-faiblement continu et injectif qui vérifie $(\iota\otimes\alpha)\alpha = (\Delta\otimes\iota)\alpha$.
Une coaction à droite de M sur N est un $*$-morphisme $\alpha : N\to N\otimes M$ unifère, σ-faiblement continu et injectif qui vérifie $(\alpha\otimes\iota)\alpha = (\iota\otimes\Delta)\alpha$.

Tout comme dans le cas des groupes, les notions de coaction à gauche ou à droite peuvent mises en correspondance soit en considérant la structure opposée.

Proposition 4.2. *Soit (M,Δ) une bigèbre de von Neumann et N une algèbre de von Neumann.*
Une application $\alpha : N\to M\otimes N$ est une coaction à gauche de (M,Δ) si et seulement si $\sigma\alpha$ est une coaction à droite de (M,Δ^{op}).

Démonstration.
On a

$$\begin{aligned} & (\sigma\alpha\otimes\iota)\sigma\alpha = (\iota\otimes\Delta^{\mathrm{op}})\sigma\alpha\\ \iff & (\sigma\otimes\iota)(\alpha\otimes\iota)\sigma\alpha = (\sigma\otimes\iota)(\iota\otimes\sigma)(\Delta^{\mathrm{op}}\otimes\iota)\alpha\\ \iff & (\iota\otimes\sigma)(\sigma\otimes\iota)(\iota\otimes\alpha)\alpha = (\iota\otimes\sigma)(\Delta^{\mathrm{op}}\otimes\iota)\alpha\\ \iff & (\iota\otimes\alpha)\alpha = (\Delta\otimes\iota)\alpha.\end{aligned}$$

□

Dans le cas d'un groupe quantique, l'antipode permet[2] de mettre en correspondance les actions à gauche et à droite.

1. Tout comme il était difficile de traduire l'élément neutre d'un groupe au niveau de $L^\infty(G)$.
2. Tout comme l'inversion dans le cas des groupes.

Proposition 4.3. *Soit $(M, \Delta, \varphi, \psi)$ un groupe quantique localement compact d'antipode unitaire R et soit N une algèbre de von Neumann.*
Une application $\alpha : N \to M \otimes N$ est une coaction à gauche de (M, Δ) si et seulement si $(\iota \otimes R)\sigma\alpha$ est une coaction à droite de (M, Δ).

Démonstration.
D'après la Proposition 4.2, on a

$$\begin{aligned}
& (\iota \otimes \alpha)\alpha = (\Delta \otimes \iota)\alpha \\
\iff & (\sigma\alpha \otimes \iota)\sigma\alpha = (\iota \otimes \Delta^{\mathrm{op}})\sigma\alpha \\
\iff & (\sigma\alpha \otimes \iota)\sigma\alpha = (\iota \otimes R \otimes R)(\iota \otimes \Delta)(\iota \otimes R)\sigma\alpha \\
\iff & (\iota \otimes R \otimes R)(\sigma\alpha \otimes \iota)\sigma\alpha = (\iota \otimes \Delta)(\iota \otimes R)\sigma\alpha \\
\iff & ((\iota \otimes R)\sigma\alpha \otimes R)\sigma\alpha = (\iota \otimes \Delta)(\iota \otimes R)\sigma\alpha \\
\iff & ((\iota \otimes R)\sigma\alpha \otimes \iota)(\iota \otimes R)\sigma\alpha = (\iota \otimes \Delta)(\iota \otimes R)\sigma\alpha.
\end{aligned}$$

□

Nous considérons donc principalement des coactions à gauche tout en gardant à l'esprit que les résultats qui suivent peuvent être adaptés aux actions à droite. Ainsi, le terme "coaction" utilisé sans précision supplémentaire désignera toujours une coaction à gauche.
Il serait naturel de dire que deux coactions α, β de (M, Δ) sur N sont équivalentes s'il existe un unitaire $U \in M \otimes N$ tel que $\alpha = U\beta U^*$. Or, si $U \in M \otimes N$ est un unitaire et si on pose $\beta : x \mapsto U\alpha(x)U^*$, β est bien un $*$-morphisme unifère, σ-faiblement continu et injectif mais on a

$$\begin{aligned}
(\iota \otimes \beta)\beta = (\Delta \otimes \iota)\beta \iff & (\Delta \otimes \iota)(U\alpha(x)U^*) = (1 \otimes U)(\iota \otimes \alpha)(U\alpha(x)U^*)(1 \otimes U^*), \\
\iff & (\Delta \otimes \iota)(U)(\Delta \otimes \iota)(\alpha(x))(\Delta \otimes \iota(U))^* = U_{23}(\iota \otimes \alpha)(U)(\iota \otimes \alpha)(\alpha(x))(\iota \otimes \alpha)(U)^* U_{23}^*.
\end{aligned}$$

Comme α est une coaction, on en déduit que β ainsi défini est une coaction dès lors que $(\Delta \otimes \iota)(U) = U_{23}(\iota \otimes \alpha)(U)$. Cette remarque motive la définition suivante.

Définition 4.4. *Soit α une action d'une bigèbre de von Neumann (M, Δ) sur une algèbre de von Neumann N. Un unitaire $U \in M \otimes N$ est appelé α-cocycle s'il vérifie l'égalité*

$$(\Delta \otimes \iota)(U) = U_{23}(\iota \otimes \alpha)(U)$$

L'application $\beta : x \mapsto U\alpha(x)U^*$ est alors une action de (M, Δ) sur N.
Deux actions α, β de (M, Δ) sur N sont dites cocycle-équivalentes s'il existe un α-cocyle U tel que β soit donné par la formule précédente. Il s'agit d'une relation d'équivalence.

On définit ensuite l'analogue du produit semi-direct pour les coactions d'un groupe quantique sur une algèbre de von Neumann. A partir de maintenant, $(M, \Delta, \varphi, \psi)$ désigne un groupe quantique représenté sur un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ et N désigne une algèbre de von Neumann. On notera également V et W les unitaires multiplicatifs associés à ψ et φ.

Définition 4.5. *Soit α une action à gauche de (M, Δ) sur N. On définit le produit croisé de N par (M, α) comme l'algèbre de von Neumann*

$$M\ {}_{\alpha}\!\ltimes N = (\alpha(N) \cup \hat{M} \otimes \mathbb{C})'' \subset \mathcal{B}(\mathscr{H}) \otimes N$$

De même, si β est une action à droite de (M, Δ) sur N, on définit le produit croisé de N par (M, β) comme l'algèbre de von Neumann

$$M \rtimes_{\beta} N = (\beta(N) \cup \mathbb{C} \otimes \hat{M})'' \subset N \otimes \mathcal{B}(\mathscr{H})$$

La dualité des groupes quantiques s'illustre également à travers les coactions. En effet, à toute coaction on peut associer naturellement une coaction du groupe quantique dual opposé. Les coactions duales nous seront utiles pour construire de nouveaux groupes quantiques mais nous énonçons d'abord rapidement un autre théorème de bidualité présent dans [8] pour le plaisir des yeux. Les opérateurs J et $\hat{J}$ intervenant dans les deux prochains résultats sont les mêmes que celui que nous avons utilisé pour définir le groupe quantique commutant à la Section 1.4, $\hat{J}$ correspondant plus précisément à l'opérateur J de $\hat{M}$.

Proposition 4.6. *Il existe une unique action* $\hat{\alpha}$ *de* $(\hat{M}, \hat{\Delta})^{\mathrm{op}}$ *sur* $M \,{}_{\alpha}\!\ltimes N$ *telle que*

$$\hat{\alpha}(\alpha(x)) = 1 \otimes \alpha(x), \qquad \forall x \in N$$

$$\hat{\alpha}(a \otimes 1) = \hat{\Delta}^{\mathrm{op}}(a) \otimes 1, \qquad \forall a \in \hat{M}$$

Plus précisément, si $\tilde{W} = (J \otimes J)\Sigma W \Sigma (J \otimes J)$*, on a*

$$\hat{\alpha}(z) = (\tilde{W} \otimes 1)(1 \otimes z)(\tilde{W}^* \otimes 1), \qquad \forall z \in M \,{}_{\alpha}\!\ltimes N$$

On peut donc construire le produit croisé $\hat{M} \,{}_{\hat{\alpha}}\!\ltimes (M \,{}_{\alpha}\!\ltimes N)$ dans $\mathcal{B}(\mathscr{H}) \otimes \mathcal{B}(\mathscr{H}) \otimes N = \mathcal{B}(\mathscr{H} \widehat{\otimes} \mathscr{H}) \otimes N$ puis réitérer le procédé pour obtenir une coaction $\hat{\hat{\alpha}}$ de $\left(M, \widehat{\hat{\Delta}^{\mathrm{op}}}^{\mathrm{op}}\right)$ sur $\hat{M} \,{}_{\hat{\alpha}}\!\ltimes (M \,{}_{\alpha}\!\ltimes N)$. Nous avons encore une fois droit à un résultat de dualité.

Théorème 4.7 (de bidualité pour les coactions de groupes quantiques)**.**

(i) L'application $\mathcal{J}$: $\begin{array}{ccc} (M, \Delta) & \to & \left(M, \widehat{\hat{\Delta}^{\mathrm{op}}}^{\mathrm{op}}\right) \\ x & \mapsto & \hat{J} J x J \hat{J} \end{array}$ *est un* $*$*-isomorphisme* σ*-faiblement continu qui commute avec les comultiplications :*

$$(\mathcal{J} \otimes \mathcal{J})\Delta = \widehat{\hat{\Delta}^{\mathrm{op}}}^{\mathrm{op}} \mathcal{J}.$$

(ii) L'application Φ : $\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(\mathscr{H}) \otimes N & \to & \hat{M} \,{}_{\hat{\alpha}}\!\ltimes (M \,{}_{\alpha}\!\ltimes N) \\ z & \mapsto & (W \otimes 1)(\iota \otimes \alpha)(z)(W^* \otimes 1) \end{array}$ *est un* $*$*-isomorphisme.*

(iii) α *induit naturellement une coaction* $\gamma \triangleq (\sigma \otimes \iota)(\iota \otimes \alpha)$ *de* (M, Δ) *sur* $B(H) \otimes N$*. L'unitaire* $\Sigma V^* \Sigma \otimes 1$ *est un* γ*-cocycle et la coaction* ρ *définie par*

$$\rho(z) = (\Sigma V^* \Sigma \otimes 1)\gamma(z)(\Sigma V \Sigma \otimes 1), \qquad \forall z \in \mathcal{B}(\mathscr{H}) \otimes N$$

correspond à la coaction $\hat{\hat{\alpha}}$ *sous les identifications précédentes :*

$$\hat{\hat{\alpha}}(\Phi(z)) = (\mathcal{J} \otimes \Phi)(\rho(z)), \qquad \forall z \in \mathcal{B}(\mathscr{H}) \otimes N.$$

5 Biproduit croisé d'une paire assortie

Les groupes quantiques que nous avons construit jusqu'à présent sont triviaux dans le sens où ils sont soit commutatifs, soit cocommutatifs. Il y a en fait une réciproque au fait que $L^\infty(G)$ et $W^*(G)$ soient triviaux.

Théorème 5.1. *Soit $(M, \Delta, \varphi, \psi)$ un groupe quantique localement compact.*

(i) Si M est cocommutatif alors il existe un groupe localement compact G tel que $M = L^\infty(G)$.

(ii) Si M est cocommutatif alors il existe un groupe localement compact G tel que $M = W^*(G)$.

Nous avons donc réussi à généraliser la notion de groupe localement compact tout en obtenant une généralisation de la dualité de Pontryagin mais il n'est pas évident que des objets fondamentalement différents des groupes existent au sein de cette catégorie. Le but de cette section est de montrer que de tels objets non triviaux existent.

Si G et H sont deux groupes, il est possible de construire un nouveau groupe moins trivial que le produit direct $G \times H$ à partir d'une action de G sur H, c'est le produit semi-direct. Nous allons utiliser un procédé similaire pour construire des groupes quantiques non-commutatifs et non-cocommutatifs à partir de ceux construis dans la Section 2. Dans [9], Vaes et Vainerman développent notamment une méthode pour construire un groupe quantique localement compact à partir de deux autres agissant l'un sur l'autre : c'est le biproduit croisé à cocycles. Nous nous restreindrons cependant au cas où les cocycles sont triviaux pour simplifier la théorie.
Fixons deux groupes quantiques $(M_1, \Delta_1, \varphi_1, \psi_1)$ et $(M_2, \Delta_2, \varphi_2, \psi_2)$ et notons $W_1, W_2, \widehat{W}_1, \widehat{W}_2$ les unitaires multiplicatifs associés.

Définition 5.2. *Le couple $((M_1, \Delta_1), (M_2, \Delta_2))$ est dit assorti s'il existe un $*$-morphisme injectif et σ-faiblement continu $\tau : M_1 \otimes M_2 \to M_1 \otimes M_2$ (appelé assortiment) tel que, en notant*

$$\alpha : \begin{array}{ccc} M_2 & \to & M_1 \otimes M_2 \\ y & \mapsto & \tau(1 \otimes y) \end{array} \quad \text{et } \beta : \begin{array}{ccc} M_1 & \to & M_1 \otimes M_2 \\ x & \mapsto & \tau(x \otimes 1) \end{array}$$

on ait :

- *α est une coaction à gauche de M_1 sur M_2.*
- *$\sigma\beta$ est une coaction à gauche de M_2 sur M_1.*
- *α et β sont assorties :*

$$\tau_{13}(\alpha \otimes \iota)\Delta_2(y) = (\iota \otimes \Delta_2)\alpha(y), \qquad \forall y \in M_2.$$

$$\tau_{23}\sigma_{23}(\beta \otimes \iota)\Delta_1(x) = (\Delta_1 \otimes \iota)\beta(x), \qquad \forall x \in M_1.$$

Étant donné un couple assorti (M_1, M_2, τ), on peut former les deux produits croisés $M_1 \, {}_\alpha\!\ltimes M_2$ et $M_2 \rtimes_\beta M_1$. Il est alors possible de munir ces deux algèbres de von Neumann d'une structure de groupe quantique localement compact de sorte qu'ils soient le dual l'un de l'autre.

La construction des comultiplications se fait à l'envers : on commence par poser les deux unitaires

$$\widehat{W} = (\beta \otimes \iota \otimes \iota)(W_1 \otimes 1)(\iota \otimes \iota \otimes \alpha)(1 \otimes \widehat{W}_2)$$

$$W = \Sigma_{13}\Sigma_{24}\widehat{W}^*\Sigma_{24}\Sigma_{13}$$

ce qui permet de définir

$$\Delta(z) = W^*(1 \otimes 1 \otimes z)W, \qquad \forall z \in M_1 \, {}_\alpha\!\ltimes M_2$$

$$\hat{\Delta}(z) = \widehat{W}^*(1 \otimes 1 \otimes z)\widehat{W}, \qquad \forall z \in M_2 \rtimes_\beta M_1.$$

Il est alors relativement aisé de montrer que Δ et $\hat{\Delta}$ définissent des comultiplications et on a notamment

$$\Delta\alpha = (\alpha \otimes \alpha)\Delta_2 \qquad \text{et} \qquad \hat{\Delta}\beta = (\beta \otimes \beta)\Delta_1.$$

Pour munir les biproduits croisés d'un poids invariant à gauche, il est nécessaire de faire appel aux actions duales de α et β (voir Proposition 4.6). Le poids invariant à gauche φ sur $M_1 \, {}_\alpha\!\ltimes M_2$ est défini via la formule

$$\varphi = \varphi_2\alpha^{-1}(\hat{\varphi}_1 \otimes \iota \otimes \iota)\hat{\alpha}$$

et on a

$$\{(y \otimes 1)\alpha(x) \mid y \in \mathcal{N}_{\hat{\varphi}_1}, x \in \mathcal{N}_{\varphi_2}\} \subset \mathcal{N}_\varphi$$

$$\varphi((y\otimes 1)\alpha(x)) = \Lambda_{\hat{\varphi}_1}(y)\otimes\Lambda_{\varphi_2}(x), \qquad \forall y\in\mathcal{N}_{\hat{\varphi}_1}, \forall x\in\mathcal{N}_{\varphi_2}$$
$$\mathcal{N}_\varphi = \overline{\mathrm{Vect}(\{((\omega_{\eta,\Lambda(b)}\otimes\iota)(W_1)\otimes 1)\alpha(x) \mid \eta\in\mathscr{H}, b\in\mathscr{T}_{\varphi_1}, x\in\mathcal{N}_{\varphi_2}\})}^{\sigma-\mathrm{w}}$$

où $\mathscr{T}_{\varphi_1}$ est l'algèbre de Tomita de φ_1 (voir [7]). Autrement dit, φ est donné formellement par $\varphi = \hat{\varphi}_1\otimes\varphi_2$, transporté sur le biproduit croisé par l'action α.
Similairement, on peut munir $M_1 \rtimes_\beta M_2$ d'un poids invariant à gauche donné formellement par $\varphi_1\otimes\hat{\varphi}_2$.

Tout comme dans le cas de la construction du groupe quantique dual, la construction des deuxièmes poids invariants se fait en fabriquant ce qui correspondra aux antipodes unitaires des produits biproduits croisés. L'idée est la suivante : nous voulons montrer que $M_1 \,{}_\alpha\!\ltimes M_2$ et $M_1 \rtimes_\beta M_2$ sont des groupes quantiques duaux. Par la Section 3, on sait que si c'est bien le cas, l'antipode unitaire de $M_1 \,{}_\alpha\!\ltimes M_2$ doit être donnée par la formule

$$R(x) = \hat{J}x^*\hat{J}, \qquad \forall x\in M_1 \,{}_\alpha\!\ltimes M_2$$

où $\hat{J}$ est la conjugaison modulaire [1] du poids φ et de même, l'antipode unitaire de $M_1 \rtimes_\beta M_2$ doit être donnée par la formule

$$\hat{R}(x) = Jx^*J, \qquad \forall x\in M_1 \rtimes_\beta M_2$$

où J est la conjugaison modulaire du poids $\hat{\varphi}$. On peut donc définir ces applications R et $\hat{R}$ puis poser naturellement les poids invariants à droite

$$\psi = \varphi R \qquad \text{et} \qquad \hat{\psi} = \hat{\varphi}\hat{R}.$$

On obtient alors le théorème suivant :

Théorème 5.3. *Les deux quadruplets* $(M_1 \,{}_\alpha\!\ltimes M_2, \Delta, \varphi, \psi)$ *et* $(M_1 \rtimes_\beta M_2, \hat{\Delta}, \hat{\varphi}, \hat{\psi})$ *sont des groupes quantiques et de plus, on a*

$$\widehat{M_1 \,{}_\alpha\!\ltimes M_2} = M_1 \rtimes_\beta M_2.$$

5.1 Premier exemple : l'assortiment trivial

Fixons $(M_1,\Delta_1), (M_2,\Delta_2)$ deux groupes quantiques localement compacts. On pose $W_1, W_2, \widehat{W}_1, \widehat{W}_2$ leurs unitaires multiplicatifs ainsi que ceux de leur dual respectif. Considérons l'application $\tau = \mathrm{id}_{M_1\otimes M_2}$. Il est clair que les applications partielles α et β vérifient bien les axiomes demandés : ce sont les actions triviales. L'algèbre de von Neumann sous-jacente au biproduit croisé est alors

$$M_1 \,{}_{\mathrm{triv}}\!\ltimes M_2 = (\hat{M}_1\otimes\mathbb{C}\cup\mathbb{C}\otimes M_2)'' = \hat{M}_1\otimes M_2.$$

L'unitaire $\widehat{W}$ est donné par

$$\widehat{W} = W_{1,13}\otimes\widehat{W}_{2,24}$$

d'où

$$\begin{aligned} W &= \Sigma\widehat{W}^*\Sigma \\ &= \Sigma(W^*_{1,13}\otimes\widehat{W}^*_{2,24})\Sigma \\ &= W^*_{1,31}\otimes\widehat{W}^*_{2,42} \\ &= \widehat{W}_{1,13}\otimes W_{2,24}.. \end{aligned}$$

La comultiplication est donc naturellement donnée par

$$\begin{aligned} \Delta(x\otimes y) &= (\widehat{W}_{1,13}\otimes W_{2,24})^*(1\otimes 1\otimes x\otimes y)(\widehat{W}_{1,13}\otimes W_{2,24}) \\ &= (\iota\otimes\sigma\otimes\iota)((\widehat{W}_1^*(1\otimes x)\widehat{W}_1)\otimes(W_2^*(1\otimes y)W_2)) \\ &= (\iota\otimes\sigma\otimes\iota)(\hat{\Delta}_1(x)\otimes\Delta_2(y)). \end{aligned}$$

Pour construire le poids invariant à gauche sur $M_1 \,{}_{\mathrm{triv}}\!\ltimes M_2$, il nous faut tout d'abord déterminer la coaction duale de α. Par la Proposition 4.6, elle est caractérisée par les égalités

$$\hat{\alpha}(1\otimes y) = 1\otimes 1\otimes y, \qquad \forall y\in M_2$$

$$\hat{\alpha}(x\otimes 1) = \hat{\Delta}^{\mathrm{op}}(x)\otimes 1, \qquad \forall x\in\hat{M}_1$$

1. Dont la construction ne nécessite pas la structure de groupe quantique mais uniquement l'existence du poids n.s.f. utilisé.

d'où $\hat{\alpha} = \hat{\Delta}^{\mathrm{op}} \otimes \iota$ est la coaction triviale de $\hat{M_1}^{\mathrm{op}}$ sur $M_1 {}_{\mathrm{triv}}\ltimes M_2$ (comme on pouvait s'y attendre). Ainsi, pour tous $y \in \mathcal{N}_{\hat{\varphi}_1}, x \in \mathcal{N}_{\varphi_2}$, on a $\hat{\alpha}((y \otimes 1)\alpha(x)) = \hat{\Delta}^{\mathrm{op}}(y) \otimes x$ d'où par invariance à droite de $\hat{\varphi}_1$ pour $\hat{\Delta}^{\mathrm{op}}$:

$$\begin{aligned}
\varphi((y \otimes 1)\alpha(x)) &= \varphi_2\alpha^{-1}(\hat{\varphi}_1 \otimes \iota \otimes \iota)\hat{\alpha}((y \otimes 1)\alpha(x)) \\
&= \varphi_2\alpha^{-1}(\hat{\varphi}_1 \otimes \iota \otimes \iota)(\hat{\Delta}^{\mathrm{op}}(y) \otimes x) \\
&= \varphi_2\alpha^{-1}((\hat{\varphi}_1 \otimes \iota)(\hat{\Delta}^{\mathrm{op}}(y)) \otimes x) \\
&= \varphi_2\alpha^{-1}(\hat{\varphi}_1(y)1 \otimes x) \\
&= \varphi_2\alpha^{-1}(\hat{\varphi}_1(y)1 \otimes \hat{\varphi}_1(y)x) \\
&= \varphi_2(\hat{\varphi}_1(y)x) \\
&= \hat{\varphi}_1(y)\varphi_2(x) \\
&= (\hat{\varphi}_1 \otimes \varphi_2)(y \otimes x)
\end{aligned}$$

et donc $\varphi = \hat{\varphi}_1 \otimes \varphi_2$. Un calcul similaire montrerait que $\hat{\varphi} = \varphi_1 \otimes \hat{\varphi}_2$, ce qui implique notamment que $\hat{J} = J_1 \otimes \hat{J}_2$ où les conjugaisons modulaires avec des indices correspondent à M_1 et M_2. L'antipode unitaire de $M_1 {}_{\mathrm{triv}}\ltimes \beta$ est donc donnée par

$$\begin{aligned}
R(x \otimes y) &= \hat{J}(x \otimes y)^*\hat{J} \\
&= (J_1 \otimes \hat{J}_2)(x^* \otimes y^*)(J_1 \otimes \hat{J}_2) \\
&= (J_1x^*J_1 \otimes \hat{J}_2y^*\hat{J}_2) \\
&= \hat{R}_1(x) \otimes R_2(y) \\
&= \hat{R}_1 \otimes R_2(x \otimes y)
\end{aligned}$$

pour tous $x \in \hat{M}_1, y \in M_2$ d'où $R = \hat{R}_1 \otimes R_2$ et donc

$$\begin{aligned}
\psi &= \varphi R \\
&= (\hat{\varphi}_1 \otimes \varphi_2)(\hat{R}_1 \otimes R_2) \\
&= \hat{\varphi}_1\hat{R}_1 \otimes \varphi R_2 \\
&= \hat{\psi}_1 \otimes \psi_2.
\end{aligned}$$

Finalement, l'assortiment trivial correspond exactement au produit tensoriel $\hat{M}_1 \otimes M_2$.

5.2 Deuxième exemple : paire assortie de sous-groupes

Considérons deux groupes localement compacts à base dénombrable G et H. On notera

$$(L^\infty(G), \Delta_G, \varphi_G, \psi_G) \quad \text{et} \quad (L^\infty(H), \Delta_H, \varphi_H, \psi_H)$$

les groupes quantiques associés. On suppose que G agit à gauche sur H via $\alpha : G \to \mathrm{Bij}(H)$ et que α est mesurable et non-singulière. On suppose également que H agit à gauche sur G via $\beta : H \to \mathrm{Bij}(G)$ et que β est mesurable et non-singulière. Par la Section 4, on sait que α et β induisent les applications

$$\alpha : \begin{array}{ccc} L^\infty(H) & \to & L^\infty(G \times H) = L^\infty(G) \otimes L^\infty(H) \\ f & \to & [(g,s) \mapsto f(\alpha_g s)] \end{array}$$

$$\beta : \begin{array}{ccc} L^\infty(G) & \to & L^\infty(G \times H) \\ f & \mapsto & [(g,s) \mapsto f(\beta_s g)] \end{array}$$

et que α et $\sigma\beta$ sont des coactions à gauche. On pose l'application

$$m : \begin{array}{ccc} L^\infty(G \times H) & \to & L^\infty(G \times H) \\ f & \mapsto & [(g,s) \mapsto f(\beta_s g, \alpha_g s)] \end{array}.$$

Remarquons que m est un $*$-morphisme et que

$$\tau(1 \otimes \cdot) = \alpha, \qquad \tau(\cdot \otimes 1) = \beta.$$

Pour que m soit un assortiment, il faut donc vérifier que m est injectif et qu'on a les égalités

$$\tau_{13}(\alpha \otimes \iota)\Delta_H = (\iota \otimes \Delta_H)\alpha \qquad \text{et} \qquad \tau_{23}\sigma_{23}(\beta \otimes \iota)\Delta_G = (\Delta_G \otimes \iota)\beta.$$

Or, si $f \in L^\infty(H)$, on a
$$\tau_{13}(\alpha \otimes \iota)\Delta_H f(g,s,t) = f\left(\alpha_{\beta_t(g)}(s)\alpha_g(t)\right)$$
et si $f \in L^\infty(G)$, on a
$$\tau_{23}\sigma_{23}(\beta \otimes \iota)\Delta_G f(g,h,s) = f\left(\beta_{\alpha_h(s)}(g)\beta_s(h)\right)$$
donc m est un assortiment dès lors qu'on a les égalités presque partout (notées $\star$) :
$$\alpha_{\beta_t(g)}(s)\alpha_g(t) = \alpha_g(st) \qquad \text{et} \qquad \beta_{\alpha_h(s)}(g)\beta_s(h) = \beta_s(gh).$$
Nous allons voir une famille d'exemples d'actions de groupes qui vérifient ces deux équations. On fixe pour cela un groupe localement compact G d'élément neutre e.

Définition 5.4. *On dit que (G_1, G_2) est une paire assortie de sous-groupes si*
- *G_1,G_2 sont fermés dans G.*
- *$G_1 \cap G_2 = \{e\}$.*
- *G_1G_2 est un ouvert de mesure pleine de G.*
- *L'application θ : $\begin{array}{ccc} G_1 \times G_2 & \to & G_1G_2 \\ (g,s) & \mapsto & gs^{-1} \end{array}$ est un homéomorphisme.*

Mentionnons qu'il est possible d'affaiblir les hypothèses sur G_1 et G_2 afin d'exprimer des conditions portant uniquement sur les structures d'espaces mesurés. Fixons une paire assortie (G_1, G_2) de sous-groupes de G et posons
$$\kappa : \begin{array}{ccc} G_1 \times G_2 & \to & G_2G_1 \\ (g,s) & \mapsto & s^{-1}g \end{array},$$
$$O = \theta^{-1}(G_1G_2 \cap G_2G_1),$$
$$O' = \kappa^{-1}(G_1G_2 \cap G_2G_1).$$
L'application $\kappa^{-1}\theta$ est alors un homéomorphisme de O sur O'. Si $(g,s) \in O$, il existe un unique couple $(x,y) \in O'$ tel que $gs^{-1} = y^{-1}x$. On pose alors $\alpha_g s = y$ et $\beta_s g = x$. Les deux applications α et β ainsi obtenues sont donc caractérisées par
$$(\beta, \alpha) : \begin{array}{ccc} O & \to & O' \\ (g,s) & \mapsto & (\beta_s g, \alpha_g s) \end{array},$$
$$gs^{-1} = (\alpha_g s)^{-1}\beta_s g, \qquad \forall (g,s) \in O.$$
Remarquons que α et β sont continues et donc mesurables, en effet si $(g_n, s_n)_n \in O^{\mathbb{N}}$ converge vers $(g,s) \in O$, on a
$$\kappa(\beta_{s_n}(g_n), \alpha_{g_n}(s_n)) = \alpha_{g_n}(s_n)^{-1}\beta_{s_n}(g_n)) = g_n s_n^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} gs^{-1} = \alpha_g(s)^{-1}\beta_s(g) = \kappa(\beta_s(g), \alpha_g(s)).$$
Or, κ est un homéomorphisme car θ en est un donc on a
$$(\beta_{s_n}(g_n), \alpha_{g_n}(s_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} (\beta_s(g), \alpha_g(s)).$$

Nous allons voir que α et β sont des actions de groupes (définies presque partout) qui vérifient les équations $\star$. Considérons $(g,s) \in O$ et $h \in G_1$. On a
$$\begin{aligned}(h, \alpha_g(s)) \in O &\iff h\alpha_g(s)^{-1} \in G_2G_1 \\ &\iff h\alpha_g(s)^{-1}\beta_s(g) \in G_2G_1 \\ &\iff hgs^{-1} \in G_2G_1 \\ &\iff (hg, s) \in O\end{aligned}$$
et si $(h, \alpha_g(s)) \in O$ alors
$$\begin{aligned}\alpha_{hg}(s)^{-1}\beta_s(hg) &= hgs^{-1} \\ &= h\alpha_g(s)^{-1}\beta_s(g) \\ &= (\alpha_h(\alpha_g(s)))^{-1}\beta_{\alpha_g(s)}(h)\beta_s(g)\end{aligned}$$
d'où
$$\alpha_{hg}(s) = \alpha_h(\alpha_g(s)) \qquad \text{et} \qquad \beta_s(hg) = \beta_{\alpha_g(s)}(h)\beta_s(g).$$

De la même manière, si $(g, s) \in \mathcal{O}$ et $t \in G_2$, on a

$$(\beta_s(g), t) \in \mathcal{O} \iff (g, ts) \in \mathcal{O}$$

et dans ce cas, on a les égalités

$$\beta_{ts}(g) = \beta_t(\beta_s(g)) \qquad \text{et} \qquad \alpha_g(ts) = \alpha_{\beta_s(g)}(t)\alpha_g(s).$$

Enfin, il est clair que pour tous $g \in G_1$ et $s \in G_2$, on a $(g, e), (e, s) \in \mathcal{O}$ et que de plus

$$\alpha_g(e) = e, \qquad \alpha_e(s) = s, \qquad \beta_s(e) = e, \qquad \beta_e(g) = g.$$

Il ne nous reste plus qu'à montrer que α et β sont non-singulières et définies sur un ensemble de mesure pleine. Nous avons pour cela besoin d'un lemme technique reliant les mesures de Haar de G_1, G_2 et G.

Lemme 5.5. *Il est possible de faire un choix de mesures de Haar à gauche sur G, G_1, G_2 tel que pour toute fonction borélienne positive sur G on ait*

$$\int_{G_1 \times G_2} f(gs^{-1})\delta_G(s^{-1})\mathrm{d}g\mathrm{d}s = \int_G f(x)\mathrm{d}x = \int_{G_1 \times G_2} f(s^{-1}g)\delta_G(g)\delta_{G_1}(g^{-1})\delta_{G_2}(s^{-1})\mathrm{d}g\mathrm{d}s.$$

Démonstration.
Fixons une mesure de Haar à gauche sur G. Pour $f \in C_c(G_1 \times G_2)$, posons

$$\tilde{f} = [(g, s) \mapsto f(g, s)\delta_G(s))] \in C_c(G_1 \times G_2) \qquad \text{et} \qquad \varphi(f) = \int_G \tilde{f} \circ \theta^{-1}(x)\mathrm{d}x.$$

Il est clair que φ est une forme linéaire positive sur $C_c(G_1 \times G_2)$ donc par le théorème de représentation de Riesz-Markov, φ est l'intégration par rapport à une certaine mesure de Radon μ sur $G_1 \times G_2$. Montrons que cette mesure est invariante à gauche. Soit $f \in C_c(G_1 \times G_2)$ et $(h, t) \in G_1 \times G_2$. Posons $F = [(g, s) \mapsto f(hg, ts)] \in C_c(G_1 \times G_2)$. Soit $x \in \Omega$ et $(g, s) \in G_1 \times G_2$ tel que $x = gs^{-1}$. On a

$$\begin{aligned}
\tilde{F} \circ \theta^{-1}(x) &= \tilde{F}(g, s) \\
&= f(hg, ts)\delta_G(s) \\
&= f(hg, ts)\delta_G(ts)\delta_G(t^{-1}) \\
&= \tilde{f}(hg, ts)\delta_G(t^{-1}) \\
&= \tilde{f} \circ \theta^{-1}(hxt^{-1})\delta_G(t^{-1})
\end{aligned}$$

d'où

$$\varphi(F) = \int_G \tilde{F}(x) \circ \theta^{-1}(x)\mathrm{d}x = \int_G \tilde{f} \circ \theta^{-1}(hxt^{-1})\delta_G(t^{-1})\mathrm{d}x = \int_G \tilde{f} \circ \theta^{-1}(x)\mathrm{d}x = \varphi(f).$$

Ainsi, μ est invariante à gauche et correspond donc à une mesure de Haar sur $G_1 \times G_2$. Il est donc possible de fixer des mesures de Haar sur G_1 et G_2 de sorte que pour toute fonction $f \in C_c(G)$, on ait

$$\int_{G_1 \times G_2} f(g, s)\mathrm{d}g\mathrm{d}s = \int_G \tilde{f} \circ \theta^{-1}(x)\mathrm{d}x.$$

L'égalité étant vraie pour toute fonction continue à support compact, elle l'est pour toute fonction borélienne positive. Ainsi, si f est borélienne positive sur G, la fonction δ_G étant positive, on a (en inversant la formule)

$$\int_G f(x)\mathrm{d}x = \int_{G_1 \times G_2} f(gs^{-1})\delta_G(s^{-1}).$$

Ce qui implique également que

$$\begin{aligned}
\int_G f(x)\mathrm{d}x &= \int_G f(x^{-1})\delta_G(x^{-1}) \\
&= \int_{G_1 \times G_2} f(sg^{-1})\delta_G(sg^{-1})\delta_G(s^{-1})\mathrm{d}g\mathrm{d}s \\
&= \int_{G_1 \times G_2} f(s^{-1}g)\delta_G(g)\delta_{G_1}(g^{-1})\delta_{G_2}(s^{-1})\mathrm{d}g\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

□

On en tire directement le corollaire suivant.

Corollaire 5.6. *Pour tout borélien A de $G_1 \times G_2$, on a équivalence entre :*

(i) A est négligeable dans $G_1 \times G_2$.

(ii) $\theta(A)$ est négligeable dans G.

(iii) $\kappa(A)$ est négligeable dans G.

En particulier, si $A \subset \Omega$ est négligeable alors $\theta^{-1}(A)$ est négligeable.

L'application θ étant une injection, on a $\theta(O^c) \subset \theta(O)^c = (G_1G_2 \cap G_2G_1)^c$. Or, G_1G_2 étant un ouvert de mesure pleine de G_1G_2, c'est également le cas pour G_2G_1 d'après le Corollaire B.4 étant donné que $((G_1G_2)^c)^{-1} = (G_2G_1)^c$. Ainsi,

$$\mu\left(\theta(O^c)\right) \leq \mu\left((G_1G_2 \cap G_2G_1)^c\right) = \mu\left((G_1G_2)^c \cup (G_2G_1)^c\right) \leq \mu\left((G_1G_2)^c\right) + \mu\left((G_2G_1)^c\right) = 0$$

d'où par le Corollaire 5.6, O est de mesure pleine. On en déduit que α et β sont bien densément définies. Considérons maintenant $K \subset G_2$ de mesure nulle. On a

$$\begin{aligned}\theta(\alpha^{-1}(K)) &= \{gs^{-1} \mid (g,s) \in G_1 \times G_2, \alpha_g(s) \in K\} \\ &= \{\alpha_g(s)^{-1}\beta_s(g) \mid (g,s) \in G_1 \times G_2, \alpha_g(s) \in K, \beta_s(g) \in G_1\} \\ &= \kappa(m^{-1}(G_1 \times K)).\end{aligned}$$

Or, K est de mesure nulle donc $G_1 \times K$ aussi et par le Corollaire 5.6, $\kappa(m^{-1}(G_1 \times K))$ est également de mesure nulle. Une fois de plus par le Corollaire 5.6, on en déduit que $\alpha^{-1}(K)$ est de mesure nulle et donc, α est non-singulière. De la même manière, si $K \subset G_1$ est de mesure nulle, on a

$$\begin{aligned}\theta(\beta^{-1}(K)) &= \{gs^{-1} \mid (g,s) \in G_1 \times G_2, \beta_g(s) \in K\} \\ &= \{\alpha_g(s)^{-1}\beta_s(g) \mid (g,s) \in G_1 \times G_2, \beta_g(s) \in K, \alpha_s(g) \in G_2\} \\ &= \kappa(m^{-1}(K \times G_2))\end{aligned}$$

d'où β est non-singulière.
D'après ce qui a été fait précédemment, l'application

$$m : \begin{array}{ccc} L^\infty(G_1 \times G_2) & \to & L^\infty(G_1 \times G_2) \\ f & \mapsto & [(g,s) \mapsto f(\beta_s(g), \alpha_g(s))] \end{array}$$

est un assortiment, à condition qu'elle soit injective. L'injectivité ne pose en fait pas de soucis : l'application m correspond simplement à la composition par (β, α), qui est bijective de O dans O' par définition. On peut donc former les biproduits croisés $L^\infty(G_1)\,{}_\alpha\!\ltimes L^\infty(G_2)$ et $L^\infty(G_1) \rtimes_\beta L^\infty(G_2)$ et les munir d'une structure de groupe quantique. Nous allons maintenant déterminer la structure de bigèbre de $L^\infty(G_1) \rtimes_\beta L^\infty(G_2)$.

Jusqu'à la fin de cette section, nous noterons $(L^\infty(G_1), \Delta_1)$ et $(L^\infty(G_2), \Delta_2)$ les groupes quantiques associés à G_1 et G_2. Nous noterons W_1 et W_2 les unitaires multiplicatifs correspondants. Nous noterons également (M, Δ) le groupe quantique associé à $L^\infty(G_1)\,{}_\alpha\!\ltimes L^\infty(G_2)$ et donc $(\hat{M}, \hat{\Delta})$ le groupe quantique associé à $L^\infty(G_1) \rtimes_\beta L^\infty(G_2)$. Posons W l'unitaire multiplicatif de (M, Δ), c'est-à-dire

$$\widehat{W} = (\beta \otimes \iota \otimes \iota)(W_1 \otimes 1)(\iota \otimes \iota \otimes \alpha)(1 \otimes \widehat{W}_2).$$

Nous admettrons la formule

$$\hat{W}F(g,s,h,t) = F(g, \alpha_{\beta_s(g)^{-1}h}(t)s, \beta_s(g)^{-1}h, t) \quad \forall F \in L^2(G_1 \times G_2 \times G_1 \times G_2)$$

donnée dans [9] à la Section 4.4.
Ainsi, pour tout $F \in L^2(G_1 \times G_2 \times G_1 \times G_2)$, on a

$$\hat{W}^*F(g,s,h,t) = F(g, \alpha_h(t)^{-1}s, \beta_{\alpha_h(t)^{-1}s}(g)h, t)$$

Nous pouvons maintenant déterminer la comultiplication sur $L^\infty(G_1) \rtimes_\beta L^\infty(G_2)$:
Si $x \in G_2$ et $F \in L^2(G_1 \times G_2 \times G_1 \times G_2)$, on a

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}(\lambda_x)F(g,s,h,t) &= \widehat{W}^*(1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \lambda_x)\widehat{W}F(g,s,h,t) \\ &= (1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \lambda_x)\widehat{W}F(g, \alpha_h(t)^{-1}s, \beta_{\alpha_h(t)^{-1}s}(g)h, t) \\ &= \widehat{W}F(g, \alpha_h(t)^{-1}s, \beta_{\alpha_h(t)^{-1}s}(g)h, x^{-1}t) \\ &= F(g, \alpha_h(x^{-1}t)\alpha_h(t)^{-1}s, h, x^{-1}t) \\ &= F(g, \alpha_{\beta_t(h)}(x^{-1})s, h, x^{-1}t)\end{aligned}$$

et si $f \in L^\infty(G_1)$, on a
$$\hat{\Delta}\beta(f)(g,s,h,t) = (\beta \otimes \beta)\hat{\Delta}(f)(g,s,h,t) = f(\beta_s(g)\beta_t(h)).$$
On voit ainsi que le groupe quantique $\hat{M}$ n'est ni commutatif ni cocommutatif dès lors que β n'est pas l'action triviale. En effet, d'une part, $\hat{M}$ n'est pas commutatif car il est engendré par $\mathbb{C} \otimes W^*(G_2)$ et $\beta(L^\infty(G_1))$ et ces éléments ne commutent pas : si $f \in L^\infty(G_1)$ et $x \in G_2$, on a
$$\begin{aligned}(1 \otimes \lambda_x)\beta(f) = \beta(f)(1 \otimes \lambda_x) &\iff \forall F \in L^2(G_1 \times G_2), (1 \otimes \lambda_x)\beta(f)F = \beta(f)(1 \otimes \lambda_x)F \\ &\iff \forall F \in L^2(G_1 \times G_2), f(\beta_{x^{-1}s}(g))F(g,x^{-1}) = f(\beta_s(g))F(g,x^{-1}) \text{ presque partout} \\ &\iff f(\beta_{x^{-1}s}(g)) = f(\beta_s(g)) \text{ pour presque tout } (g,s) \in G_1 \times G_2\end{aligned}$$
donc si $\hat{M}$ est commutatif, β doit être triviale.
D'autre part, si $(\hat{M}, \hat{\Delta})$ étant cocommutatif, la formule établie précédemment pour $\hat{\Delta}(\lambda_x$ avec $x \in G_2$ implique que pour tout $x \in G_2$, on aurait $\alpha_{\beta_t(h)}(x^{-1}) = x^{-1}$ pour presque tout $(h,t) \in G_1 \times G_2$ donc α serait triviale et donc β aussi.

Finalement, nous allons donner un exemple d'un groupe G localement compact à base dénombrable possédant une paire de sous-groupes assortis. Considérons le groupe
$$a\mathrm{x} + b = \left\{\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1\end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid x \in \mathbb{R}^*, y \in \mathbb{R}\right\}$$
ainsi que ses deux sous-groupes
$$G_1 = \left\{\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid x \in \mathbb{R}^*\right\} \text{ et } \left\{\begin{bmatrix} x & 1-x \\ 0 & 1\end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid x \in \mathbb{R}^*\right\}.$$
Il est clair que G_1 et G_2 sont tous les deux fermés dans $a\mathrm{x} + b$ et que $G_1 \cap G_2 = \{I_2\}$. De plus, on a
$$\begin{aligned}G_1G_2 &= \left\{\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y & 1-y \\ 0 & 1\end{bmatrix} \mid x,y \in \mathbb{R}^*\right\} \\ &= \left\{\begin{bmatrix} xy & x(1-y) \\ 0 & 1\end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid x,y \in \mathbb{R}^*\right\}\end{aligned}$$
et pour $(z,t) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, le système $\left\{\begin{array}{l} xy = z \\ x(1-y) = t\end{array}\right.$ admet une solution $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ si et seulement si $t + z \neq 0$ donc on a
$$(G_1G_2)^{\mathrm{c}} = \left\{\begin{bmatrix} x & -x \\ 0 & 1\end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid x \in \mathbb{R}^*\right\}.$$
Ainsi, $G_1G_2)$ est un ouvert et comme une mesure de Haar à gauche sur $a\mathrm{x} + b$ est donnée par $\mathrm{d}A = \frac{1}{|x|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $(G_1G_2)^{\mathrm{c}}$ est de mesure nulle. Finalement, l'application
$$\theta : \begin{array}{ccc} G_1 \times G_2 & \to & G_1G_2 \\ (A,B) & \mapsto & AB^{-1}\end{array}$$
étant rationelle et d'inverse rationnel donné par
$$\theta^{-1} : \begin{array}{ccc} G_1G_2 & \longrightarrow & G_1 \times G_2 \\ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1\end{bmatrix} & \mapsto & \left(\begin{bmatrix} x+y & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{x+y}{x} & -\frac{y}{x} \\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)\end{array},$$
c'est un homéomorphisme.
Le couple (G_1, G_2) est donc une paire assortie. Pour finir, déterminons les actions α et β associées. Rappelons qu'elles sont caractérisées par l'égalité
$$AB^{-1} = \alpha_A(B)^{-1}\beta_B(A), \qquad \forall (A,B) \in \theta^{-1}(G_1G_2 \cap G_2G_1).$$
Comme on a
$$G_2G_1 = \left\{\begin{bmatrix} xy & 1-y \\ 0 & 1\end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid x,y \in \mathbb{R}^*\right\} = \left\{\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1\end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid x \in \mathbb{R}^*, y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, x+y \neq 0\right\},$$
on a
$$\begin{aligned}\theta^{-1}(G_1G_2 \cap G_2G_1) &= \left\{\left(\begin{bmatrix} x+y & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{x+y}{x} & -\frac{y}{x} \\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) \mid x \in \mathbb{R}^*, y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, x+y \neq 0\right\} \\ &= \left\{\left(\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y & 1-y \\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) \mid x \in \mathbb{R}^*, y \in \mathbb{R}, xy \neq x+y\right\}.\end{aligned}$$

Soit donc $(A,B) = \left(\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y & 1-y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \in \theta^{-1}(G_1G_2 \cap G_2G_1)$. On a

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y & 1-y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y}{x+y-xy} & 1-\frac{y}{x+y-xy} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{x}{x+y-xy} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donc les actions α et β sont données par

$$\alpha_A(B) = \begin{bmatrix} \frac{y}{x+y-xy} & 1-\frac{y}{x+y-xy} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \beta_B(A) = \begin{bmatrix} \frac{x}{x+y-xy} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.3 Troisième exemple : l'assortiment canonique entre un groupe quantique et son dual

Étant donné un groupe quantique localement compact $(M, \Delta, \varphi, \psi)$, il est possible de définir un assortiment entre M et $\hat{M}$ via son unitaire multiplicatif W. Nous suivrons ici la construction proposée dans la Section 8 de l'article de S. Baaj et S. Vaes [1].
L'unitaire multiplicatif W appartenant à $M \otimes \hat{M}$, on peut poser l'application $m : M \otimes \hat{M} \to M \otimes \hat{M}$ définie par

$$m(x \otimes y) = W(x \otimes y)W^*, \quad \forall x \in M, \forall y \in \hat{M}.$$

Posons également

$$\alpha : \begin{array}{ccc} \hat{M} & \to & M \otimes \hat{M} \\ y & \mapsto & m(1 \otimes y) = W(1 \otimes y)W^* \end{array} \quad \text{et} \quad \beta : \begin{array}{ccc} M & \to & M \otimes \hat{M} \\ x & \mapsto & m(x \otimes 1) = W(x \otimes 1)W^* \end{array}.$$

Nous admettons ici que W vérifie l'équation $(\Delta \otimes \iota)(W) = W_{13}W_{23}$ et donc par symétrie que $(\hat{\Delta} \otimes \iota)(\widehat{W}) = \widehat{W}_{13}\widehat{W}_{23}$.
On a alors la relation

$$\begin{aligned}
(\iota \otimes \hat{\Delta})(W) &= (\iota \otimes \hat{\Delta})((\Sigma\widehat{W}\Sigma)^*) \\
&= (\iota \otimes \hat{\Delta})(\sigma\widehat{W})^* \\
&= (\sigma_{12}\sigma_{23}(\hat{\Delta} \otimes \iota)(\widehat{W}))^* \\
&= (\sigma_{12}\sigma_{23}(\widehat{W}_{13}\widehat{W}_{23}))^* \\
&= \sigma_{12}\sigma_{23}(\widehat{W}_{23}^*\widehat{W}_{13}^*) \\
&= \sigma_{12}\sigma_{23}(W_{32}W_{31}) \\
&= W_{13}W_{12}
\end{aligned}$$

Pour tout $y \in \hat{M}$, on a

$$\begin{aligned}
(\iota \otimes \alpha)\alpha(y) &= (\iota \otimes \alpha)(W(1 \otimes y)W^*) \\
&= W_{23}W_{13}(1 \otimes 1 \otimes y)W_{13}^*W_{23}^* \\
&= (\Delta^{\mathrm{op}} \otimes \iota)(W)(\Delta^{\mathrm{op}}(1 \otimes y))(\Delta^{\mathrm{op}} \otimes \iota)(W)^* \\
&= (\Delta^{\mathrm{op}} \otimes \iota)(W(1 \otimes y)W^*) \\
&= (\Delta^{\mathrm{op}} \otimes \iota)\alpha(y)
\end{aligned}$$

donc α est une coaction à gauche de $(M, \Delta)^{\mathrm{op}}$ sur $(\hat{M}, \hat{\Delta})$. Similairement, pour tout $x \in M$, on a

$$\begin{aligned}
(\beta \otimes \iota)\beta(x) &= (\beta \otimes \iota)(W(x \otimes 1)W^*) \\
&= W_{12}W_{13}(x \otimes 1 \otimes 1)W_{13}^*W_{12}^* \\
&= (\iota \otimes \hat{\Delta}^{\mathrm{op}})(W)(\iota \otimes \hat{\Delta}^{\mathrm{op}})(x \otimes 1)(\iota \otimes \hat{\Delta}^{\mathrm{op}})(W)^* \\
&= (\iota \otimes \hat{\Delta}^{\mathrm{op}})(W(x \otimes 1)W^*) \\
&= (\iota \otimes \hat{\Delta}^{\mathrm{op}})\beta(x)
\end{aligned}$$

donc β est une action à droite de $(\hat{M}, \hat{\Delta})^{\mathrm{op}}$ sur (M, Δ) et par la Proposition 4.2, $\sigma\beta$ est une action à gauche de $(\hat{M}, \hat{\Delta})$ sur (M, Δ).
De plus, d'après la relation $(\iota \otimes \hat{\Delta})(W) = W_{13}W_{12}$, on a pour tout $y \in \hat{M}$

$$\begin{aligned}
(\iota \otimes \hat{\Delta})\alpha(y) &= (\iota \otimes \hat{\Delta})(W(1 \otimes y)W^*) \\
&= (\iota \otimes \hat{\Delta})(W)(\iota \otimes \hat{\Delta})(1 \otimes y)(\iota \otimes \hat{\Delta})(W)^* \\
&= W_{13}W_{12}(1 \otimes \hat{\Delta}(y))W_{12}^*W_{13}^* \\
&= W_{13}(\alpha \otimes \iota)\hat{\Delta}(y)W_{13}^* \\
&= \tau_{13}(\alpha \otimes \iota)\hat{\Delta}(y)
\end{aligned}$$

et par la relation $(\Delta \otimes \iota)(W) = W_{13}W_{23}$, on a aussi

$$\begin{aligned}
(\Delta^{\mathrm{op}} \otimes \iota)\beta(x) &= \sigma_{12}\left((\Delta \otimes \iota)(x \otimes 1)\right) \\
&= \sigma_{12}\left((\Delta \otimes \iota)(W(x \otimes 1)W^*)\right) \\
&= \sigma_{12}\left((\Delta \otimes \iota)(W)(\Delta \otimes \iota)(x \otimes 1)(\Delta \otimes \iota)(W)^*\right) \\
&= W_{23}W_{13}(\Delta^{\mathrm{op}}(x) \otimes 1)W_{13}^*W_{23}^* \\
&= \tau_{23}\sigma_{23}(\beta \otimes \iota)\Delta^{\mathrm{op}}(x)
\end{aligned}$$

pour tout $x \in M$ donc α et β sont assorties au sens de la Définition 5.2.
Ainsi, l'application m est un assortiment et on peut donc considérer le groupes quantique

$$(M^{\mathrm{op}}\,{}_{\mathrm{can}}\!\ltimes \hat{M}, \tilde{\Delta}).$$

Cet assortiment ne permet cependant pas de construire plus de groupes quantiques que nous le permettent le deux assortiments précédents, c'est l'objet du théorème suivant, dont la preuve peut être trouvée dans la Section 8 de [1].

Théorème 5.7. *L'application* Ad_{W^*} *est un isomorphisme entre*

$$(M^{\mathrm{op}}\,{}_{\mathrm{can}}\!\ltimes \hat{M}, \tilde{\Delta}) \quad \text{et} \quad (\hat{M}' \otimes \hat{M}, (\iota \otimes \sigma \otimes \iota)(\hat{\Delta}' \otimes \hat{\Delta})) = (M^{\mathrm{op}}\,{}_{\mathrm{triv}}\!\ltimes \hat{M}, (\iota \otimes \sigma \otimes \iota)(\hat{\Delta^{\mathrm{op}}} \otimes \hat{\Delta})))$$

au sens où

(i) l'application Ad_{W^*} *est un* $*$*-isomorphisme,*

(ii) l'application Ad_{W^*} *est un comorphisme :* $(\mathrm{Ad}_{W^*} \otimes \mathrm{Ad}_{W^*})\tilde{\Delta} = \mathrm{Ad}_{W^*}(\iota \otimes \sigma \otimes \iota)(\hat{\Delta}' \otimes \hat{\Delta})$.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons vu qu'il est possible de généraliser la notion de groupe localement compact en remplacant la structure de groupe par une algèbre de von Neumann munie de structures supplémentaires. Cette définition permet également d'obtenir l'existence de l'antipode en tant que théorème et non comme un axiome comme c'est le cas pour les algèbres de Kac. Nous avons ensuite montré que la notion de groupe quantique localement compact est bien une généralisation de la notion de groupe en construisant les $L^\infty(G)$ et $W^*(G)$ à partir d'un groupe localement compact à base dénombrable G. Après avoir vu comment associer à tout groupe quantique un autre groupe quantique appelé groupe quantique dual, nous avons montré que les groupes quantiques $L^\infty(G)$ et $W^*(G)$ sont le dual l'un de l'autre. Cette dualité constitue bien une généralisation de la dualité de Pontryagin des groupes abéliens localement compacts un fois que l'on a identifié les C^*-algèbres $C_0(\hat{G})$ et $C^*_{\text{red}}(G)$ via la transformée de Fourier. Dans la Section 4, nous avons vu une généralisation naturelle de la notion d'actions de groupes pour les groupes quantiques et nous avons également vu un théorème de dualité pour les coactions de groupes quantiques. Enfin, dans la Section 5, nous avons vu que la catégorie des groupes quantiques localement compacts contient bien des objets non associés à des groupes localement compacts en étudiant une méthode de constructions de groupes quantiques : c'est le biproduit croisé d'une paire assortie.

L'écriture de ce mémoire a été pour moi la parfaite occasion d'en apprendre plus sur les algèbres d'opérateurs en général et de travailler pour la première fois sur des articles de recherche. Je tiens à remercier très chaleureusement V. Gayral pour avoir accepté de m'accompagner dans ce projet. Son aide m'a été très précieuse durant toute l'écriture de ce manuscrit, nos discussions et ses conseils furent très enrichissants.

Annexes

A Algèbres d'opérateurs

L'entièreté de ce mémoire reposant sur les algèbres d'opérateurs sur un espace de Hilbert, nous rappelons ici quelques définitions et résultats dont nous aurons besoin.

Définition A.1.

Une C^*-algèbre est la donnée d'une algèbre de Banach M et d'une isométrie antilinéaire, antimultiplicative et involutive $* : M \to M$ vérifiant

$$\|x^*x\| = \|x\|^2$$

pour tout $x \in M$. On dit alors que $*$ est une involution.
Si M et N sont deux C^*-algèbres, on appellera $*$-morphisme tout morphisme d'algèbre $f : M \to N$ vérifiant $f(x^*) = f(x)^*$ pour tout $x \in M$.

Si $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert, toute sous-algèbre de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ stable par adjoint et fermée pour la topologie normique est une C^*-algèbre. Réciproquement, si M est une C^*-algèbre alors il existe un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ et un $*$-morphisme isométrique $\pi : M \to \mathcal{B}(\mathscr{H})$.
Les algèbres d'opérateurs dont nous aurons besoin sont un cas particulier des C^*-algèbres.

Définition A.2. *Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert. Si $A \subset \mathcal{B}(\mathscr{H})$, on appelle commutant de A l'ensemble*

$$A' = \{T \in \mathcal{B}(\mathscr{H}) \mid \forall U \in A, TA = AT\}.$$

On appelle algèbre de von Neumann sur $\mathscr{H}$ toute sous-algèbre unifère M de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ stable par adjoint vérifiant $M'' = M$.

Cette hypothèse sur le bicommutant de M étant purement algébrique, elle admet en fait un équivalent analytique qui s'exprime à l'aide des topologies localement convexes classiques sur $\mathcal{B}(\mathscr{H})$. Nous rappelons rapidement leurs définitions.

Définition A.3. *Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert. On appelle*

(i) topologie forte des opérateurs la topologie initiale sur $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ pour les applications $T \mapsto Tx$ avec $x \in H$.

(ii) topologie σ-forte la topologie initiale sur $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ pour les applications

$$T \mapsto \sum_{n\geq 0} Tx_n$$

avec $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathscr{H})$.

(iii) topologie forte-$*$ la topologie initiale sur $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ pour les applications $T \mapsto Tx$ et $T \mapsto T^*x$ avec $x \in H$.

(iv) topologie σ-forte-$*$ la topologie initiale sur $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ pour les applications

$$T \mapsto \sum_{n\geq 0} Tx_n \quad \text{et} \quad T \mapsto \sum_{n\geq 0} T^*x_n$$

avec $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathscr{H})$.

(v) topologie faible des opérateurs la topologie initiale sur $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ pour les applications $T \mapsto \langle Tx|y\rangle$ avec $x, y \in H$.

(vi) topologie σ-faible la topologie initiale sur $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ pour les applications

$$T \mapsto \sum_{n\geq 0} \langle Tx_n|y_n\rangle$$

avec $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathscr{H})$.

Théorème (du bicommutant de von Neumann). *Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et soit $M \subset \mathcal{B}(\mathscr{H})$ une sous-algèbre unifère stable par adjoint. Le bicommutant M'' de M coïncide avec les adhérences faible, forte, forte-$*$, σ-faible, σ-forte et σ-forte-$*$ de M. En particulier, M est une algèbre de von Neumann si et seulement si M est fermée pour l'un de ces topologies.*

Les algèbres de von Neumann sont donc des cas particuliers de C^*-algèbres. Elles admettent en fait une caractérisation parmi les C^*-algèbres.

Théorème A.5. *Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et soit $M \subset \mathcal{B}(\mathscr{H})$ une C^*-algèbre. On a équivalence entre*

$$M \text{ est une algèbre de von Neumann.} \iff M \text{ admet un prédual.}$$

et lorsque M admet un prédual, il est composé des restrictions à M des formes linéaires σ-faiblement continues sur $\mathcal{B}(\mathscr{H})$. En particulier, la topologie faible-$*$ héritée du prédual de M et la topologie σ-faible héritée par $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ coïncident.

La topologie σ-faible étant intrinsèque à M, c'est celle que nous privilégierons [1].

Si M, N sont des algèbres de von Neumann sur $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$, leur produit tensoriel algébrique $M \odot N$ est une sous-algèbre involutive unifère d'opérateurs sur le produit d'espaces de Hilbert $\mathscr{H}_1 \hat{\otimes} \mathscr{H}_2$. On note $M \otimes N$ l'algèbre de von Neumann $(M \odot N)''$ et on dit que c'est le produit tensoriel des deux algèbres de von Neumann M, N. On a alors l'égalité $(M \otimes N)' = M' \otimes N'$.

Si M est une C^*-algèbre, on dit qu'un élément $x \in M$ est positif si et seulement si il existe $y \in M$ tel que $x = y^* y$. On note alors M^+ l'ensemble des éléments positifs de M. On pose alors un ordre partiel sur M^+ en définissant pour $a, b \in M^+$ la relation

$$a \leq b \iff b - a \in M^+.$$

Dans le cas où M est une algèbre de von Neumann, l'ensemble M^+ possède également une propriété de borne supérieure remarquable.

Proposition A.6. *Soit M est une algèbre de von Neumann. Si $(x_i)_{i \in I} \in (M^+)^I$ est une suite généralisée croissante, l'ensemble $\{x_i \mid i \in I\}$ admet une borne supérieure x dans M^+ et $(x_i)_{i \in I}$ converge σ-faiblement vers x.*

Durant la construction des groupes quantiques classiques, nous aurons besoin de plusieurs lemmes techniques classiques concernant la topologie σ-faible.

Lemme A.7. *Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert. Le produit tensoriel algébrique $\mathcal{B}(\mathscr{H}) \odot \mathcal{B}(\mathscr{H})$ s'injecte dans $\mathcal{B}(\mathscr{H} \widehat{\otimes} \mathscr{H})$ via l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(\mathscr{H}) \odot \mathcal{B}(\mathscr{H}) & \to & \mathcal{B}(\mathscr{H} \widehat{\otimes} \mathscr{H}) \\ (A, B) & \mapsto & A \otimes B = [x \otimes y \mapsto Ax \otimes By] \end{array}$ et son image est σ-faiblement dense dans $\mathcal{B}(\mathscr{H} \widehat{\otimes} \mathscr{H})$. On a donc $\mathcal{B}(\mathscr{H}) \otimes \mathcal{B}(\mathscr{H}) = \mathcal{B}(\mathscr{H} \widehat{\otimes} \mathscr{H})$ en tant qu'algèbres de von Neumann.*

Démonstration.

Soient $A, B \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$. L'application bilinéaire continue $A \times B : \begin{array}{ccc} \mathscr{H} \times \mathscr{H} & \to & \mathscr{H} \otimes \mathscr{H} \\ (x, y) & \mapsto & A(x) \otimes B(y) \end{array}$ induit un opérateur borné $A \otimes B$ sur $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}$ qui envoie $x \otimes y$ sur $A(x) \otimes B(y)$. L'application bilinéaire $\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(\mathscr{H}) \times \mathcal{B}(\mathscr{H}) & \to & \mathcal{B}(\mathscr{H} \widehat{\otimes} \mathscr{H}) \\ (A, B) & \mapsto & A \otimes B \end{array}$ induit une application linéaire $\Psi : \mathcal{B}(\mathscr{H}) \otimes \mathcal{B}(\mathscr{H}) \to \mathcal{B}(\mathscr{H} \widehat{\otimes} \mathscr{H})$. Montrons qu'elle est injective.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une base de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$. Considérons $A \in \mathcal{B}(\mathscr{H}) \otimes \mathcal{B}(\mathscr{H})$ telle que $\Psi(A) = 0$. Il existe $J \subset I$ fini une famille $(\alpha_{ij})_{(i,j) \in J^2}$ de scalaires tels que $F = \sum_{ij} \alpha_{ij} A_i \otimes A_j$. Fixons $y \in \mathscr{H}$. Pour tout $x \in \mathscr{H}$, on a

$$\sum_i \left(\sum_j \alpha_{ij} A_j(y) \right) A_i(x) = 0.$$

Or, la famille $(A_i)_{i \in I}$ est libre donc on a $\alpha_{ij} A_j(y) = 0$ pour tout $i \in J$ et ce, pour tout $y \in \mathscr{H}$. Encore par liberté, on obtient donc $\alpha_{ij} = 0$ pour tout $(i, j) \in J^2$ d'où $A = 0$ et Ψ est injective.

1. Les topologies σ-forte et σ-forte-$*$ sont en fait également intrinsèques mais nous préférerons tout de même utiliser la topologie σ-faible.

De plus, on a $(\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}))' = \mathcal{B}(\mathcal{H})' \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H})' = \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ d'où

$$\overline{\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H})}^{\sigma-\mathrm{w}} = (\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}))'' = (\mathbb{C} \otimes \mathbb{C})' = \mathcal{B}(\mathcal{H} \widehat{\otimes} \mathcal{H}).$$

□

Proposition A.8. *Soient M et N deux algèbres de von Neumann et soit $\pi : M \to N$ une application linéaire. π est σ-faiblement continue si et seulement si π induit une application ${}^t\pi : N_* \to M_*$ i.e. si et seulement si pour tout $\omega \in N_*$, on a $\omega \circ \pi \in N_*$.*

Démonstration.

Supposons que π est σ-faiblement continue. Alors, pour tout $\omega \in N_*$, $\omega \circ \pi$ est linéaire et σ-faiblement continue car ω et π le sont d'où $\omega \circ \pi \in M_*$.
Supposons réciproquement que pour tout $\omega \in N_*$, on a $\omega \circ \pi \in M_*$. π étant linéaire, il suffit de vérifier sa σ-faible continuité de π en 0_M. Soit donc $(x_i)_{i \in I} \in M^I$ convergeant σ-faiblement vers $x \in M$. Pour tout $\omega \in N_*$, $\omega \circ \pi$ est σ-faiblement continue d'où $\omega \circ \pi(x_i) = \omega(\pi(x))$ tend vers 0. Ainsi, $(\pi(x_i))_{i \in I}$ tend σ-faiblement vers 0_N et π est bien σ-faiblement continue. □

Lemme A.9. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Pour tout $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, les applications $\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(\mathcal{H}) & \to & \mathcal{B}(\mathcal{H} \widehat{\otimes} \mathcal{H}) \\ T & \mapsto & T \otimes S \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(\mathcal{H}) & \to & \mathcal{B}(\mathcal{H} \widehat{\otimes} \mathcal{H}) \\ T & \mapsto & S \otimes T \end{array}$ sont σ-faiblement continues.*

Démonstration.

On pose $\pi : \begin{array}{ccc} \mathcal{B}(L^2(G)) & \to & \mathcal{B}(L^2(G \times G)) \\ T & \mapsto & T \otimes S \end{array}$. Soient $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \in L^2(G)$. Pour tout $T \in \mathcal{B}(L^2(G))$, on a

$$\begin{aligned} {}^t\pi(\omega_{\xi_1,\eta_1} \otimes \omega_{\xi_2,\eta_2})(T) &= \omega_{\xi_1,\eta_1} \otimes \omega_{\xi_2,\eta_2}(\pi(T)) \\ &= \omega_{\xi_1,\eta_1} \otimes \omega_{\xi_2,\eta_2}(T \otimes S) \\ &= \omega_{\xi_1,\eta_1}(T) \otimes \omega_{\xi_2,\eta_2}(S) \\ &= \langle S\xi_2 | \eta_2 \rangle \, \omega_{\xi_1,\eta_1}(T) \end{aligned}$$

d'où ${}^t\pi(\omega_{\xi_1,\eta_1} \otimes \omega_{\xi_2,\eta_2}) = \langle S\xi_2 | \eta_2 \rangle \, \omega_{\xi_1,\eta_1} \in \mathcal{B}(L^2(G))_*$. En notant $E = \{\omega_{\xi_1,\eta_1} \otimes \omega_{\xi_2,\eta_2} \mid \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \in L^2(G)\}$, on a ${}^t\pi(E) \subset \mathcal{B}(L^2(G))_*$. Étant donné que π est continue, elle est norme-continue et ${}^t\pi$ est également norme-continue. Ainsi, ${}^t\pi\left(\overline{E}^{\|\cdot\|}\right) \subset \overline{\mathcal{B}(L^2(G))_*}^{\|\cdot\|} = \mathcal{B}(L^2(G))_*$. Or, E est norme-dense dans $\mathcal{B}(L^2(G \times G))_*$ donc on a ${}^t\pi\left(\overline{E}^{\|\cdot\|}\right) \subset \mathcal{B}(L^2(G \times G))_*$ et par la Proposition A.8, π est σ-faiblement continue.
L'application $T \mapsto S \otimes T$ coïncidant avec $\Sigma\pi$, elle est également σ-faiblement continue. □

Lemme A.10. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ unitaire. L'application $\mathrm{Ad}_U : \begin{array}{ccc} \mathcal{B}(\mathcal{H}) & \to & \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ T & \mapsto & UTU^* \end{array}$ est σ-faiblement continue.*

Démonstration.

Soit $(T_i)_{i \in I} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^I$ une suite généralisée qui tend σ-faiblement vers 0. Soient $(\xi_n)_n, (\eta_n)_n \in \mathcal{H}$ deux suites de carré sommable. U étant unitaire, les deux suites $(U^*\xi_n)_n$ et $(U^*\eta_n)_n$ sont également de carré sommable. On a

$$\begin{aligned} \sum_n \langle \mathrm{Ad}_U(T_i)\xi_n | \eta_n \rangle &= \sum_n \langle UT_iU^*\xi_n | \eta_n \rangle \\ &= \sum_n \langle T_i(U^*\xi_n) | U^*\eta_n \rangle \\ &\xrightarrow[i \to +\infty]{} 0 \end{aligned}$$

d'où $\mathrm{Ad}_U(T_i)$ tend σ-faiblement vers 0. Ad_U étant linéaire, on en conclut que Ad_U est σ-faiblement continue. □

B Mesure de Haar

L'entièreté de ce mémoire reposant sur la mesure de Haar d'un groupe localement compact, nous présentons ici sans preuve les résultats principaux qui seront constamment utilisés ainsi que quelques lemmes techniques sur les groupes topologiques. Pour plus de précisions sur la mesure de Haar d'un groupe localement compact, se référer à [2].

Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé et $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de E. On appelle mesure de Radon toute mesure μ sur $\mathcal{B}$ qui vérifie les trois conditions suivantes :

(i) Pour tout $O \in \mathcal{T}$, on a $\mu(O) = \sup_{K \subset O \text{ compact}} \mu(K)$,

(ii) Pour tout $A \in \mathcal{B}$, on a $\mu(A) = \inf_{A \subset O \text{ ouvert}} \mu(O)$,

(iii) Tout élément $x \in E$ admet un voisinage de mesure finie.

Soit G un groupe topologique localement compact. Une mesure de Radon est dite invariante à gauche si et seulement si pour toute fonction $f \in C_c(G)$ et tout $g \in G$ on a

$$\int_G f(gx)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Il est équivalent de dire que pour tout $A \in \mathcal{B}$ et tout $g \in G$ on a $\mu(gA) = \mu(A)$. On définit également les mesures de Radon invariante à droite par les conditions équivalentes

$$(\forall f \in C_c(G))(\forall g \in G), \int_G f(xg)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x) \qquad \text{et} \qquad (\forall g \in G)(\forall A \in \mathcal{B}), \mu(Ag) = \mu(A).$$

Théorème B.1. *Si G est un groupe topologique localement compact, il existe une mesure de Radon invariante à gauche sur G et une mesure de Radon invariante à droite sur G. Elles sont de plus uniques à facteur strictement positif près.*

De telles mesures sont appelées mesures de Haar à gauche ou à droite. Il est clair que si μ est une mesure de Haar à gauche (resp. à droite), $A \mapsto \mu(A^{-1})$ est une mesure de Haar à droite (resp. à gauche).

Proposition B.2. *Soit G un groupe localement compact et μ une mesure de Haar sur G.*

(i) Tout ouvert non vide est de mesure non nulle.

(ii) Tout compact est de mesure finie.

(iii) Toute fonction continue positive d'intégrale nulle est nulle.

Dans toute la suite, on fixe G un groupe localement compact et μ une mesure de Haar sur G. Si $g \in G$, l'application $\mu_g : A \to \mu(Ag)$ définit une mesure de Radon invariante à gauche sur G donc il existe $\delta_G(g) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mu_g = \delta_G(g)\mu$. Remarquons qu'on a alors

$$\int_G f(x)\mathrm{d}\mu_g(x) = \int_G f(xg^{-1})\mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(gxg^{-1})\mathrm{d}\mu(x).$$

Pour $y \in G$, on pose $\lambda_y : \begin{array}{ccc} L^1(G) & \to & L^1(G) \\ f & \mapsto & [x \mapsto f(y^{-1}x)] \end{array}$ ainsi que $R_y : \begin{array}{ccc} L^1(G) & \to & L^1(G) \\ f & \mapsto & [x \mapsto f(xy)] \end{array}$.

Théorème B.3. *Soit G un groupe localement compact et μ une mesure de Haar à gauche sur G.*

(i) Si $y \in G$ et $f \in L^1(G)$, on a

$$\int_G f(xy)\mathrm{d}\mu(x) = \delta_G(y^{-1}) \int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

(ii) La fonction modulaire $\delta_G : G \to \mathbb{R}_+^*$ est un morphisme continu.

(iii) Si $f \in L^1(G)$, on a $\check{f}\delta_G^{-1} \in L^1(G)$ et $\int_G f(x^{-1})\delta_G(x^{-1})\mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x)$.

(iv) Si G est abélien ou si G est compact, on a $\delta_G \equiv 1$.

Corollaire B.4. *Soit G un groupe localement compact, μ une mesure de Haar à gauche et ν une mesure de Haar à droite. Si $A \subset G$, on a l'équivalence*

$$\mu(A) = 0 \iff \nu(A) = 0.$$

Lemme B.5. *Si $1 \le p < +\infty$ et $f \in L^p(G)$, l'application $y \mapsto \lambda_y f$ est continue de G dans $L^p(G)$.*

Lemme B.6. *Soit G un groupe topologique séparé. Si $A, B \subset G$ sont compacts alors AB l'est aussi.*

Démonstration.

Soit $(a_i b_i)_{i\in I}$ une suite généralisée à valeurs dans AB. A étant compact, il existe une sous-suite convergeante $(a_{\varphi(i)})_{i\in I}$ de $(a_i)_{i\in I}$. B étant compact, il existe également une sous-suite convergeante de $(b_{\varphi\circ\psi(i)})_{i\in I}$ de $(b_i)_{i\in I}$. La continuité de la multiplication dans G implique alors que la sous-suite $(a_{\varphi\circ\psi(i)} b_{\varphi\circ\psi(i)})_{i\in I}$ de $(a_i b_i)_{i\in I}$ converge et donc AB est compact. □

C Identification de produits tensoriels

Nous allons montrer que $L^\infty(G\times G)$ peut s'identifier au produit tensoriel d'algèbres de von Neumann $L^\infty(G)\otimes L^\infty(G)$. Avant d'établir cette construction, nous allons expliciter un isomorphisme isométrique entre le produit tensoriel d'espaces de Hilbert $L^2(G)\hat{\otimes}L^2(G)$ et l'espace de Hilbert $L^2(G\times G)$ de sorte que le produit tensoriel $L^\infty(G) \odot L^\infty(G)$ puisse s'injecter dans $\mathcal{B}(L^2(G\times G))$.

On pose $B : \begin{array}{ccc} L^2(G)\times L^2(G) & \to & L^2(G\times G) \\ (f,g) & \mapsto & [(x,y)\mapsto f(x)g(y)] \end{array}$. C'est une application bilinéaire sur $L^2(G)\times L^2(G)$ et elle induit donc une application linéaire $\tilde{B} : L^2(G)\odot L^2(G) \to L^2(G\times G)$ qui envoie $f\otimes g$ sur $[(x,y) \to f(x)g(y)]$.

Lemme C.1. *L'application $\tilde{B}$ est une isométrie.*

Démonstration.

Soient $f, g, h, k \in L^2(G)$. On a

$$\begin{aligned}
\left\langle \tilde{B}(f\otimes g) \middle| \tilde{B}(h\otimes k)\right\rangle &= \int_{G\times G} f(x)g(y)\overline{h(x)k(y)}\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu)(x,y) \\
&= \int_G f(x)\overline{h(x)}\mathrm{d}\mu(x) \int_G g(y)\overline{k(y)}\mathrm{d}\mu(y) \\
&= \langle f|h\rangle \langle g|k\rangle \\
&= \langle f\otimes g|h\otimes k\rangle .
\end{aligned}$$

Ainsi, $\tilde{B}$ conserve le produit scalaire et est donc une isométrie. □

L'application $\tilde{B}$ se prolonge donc en une isométrie définie sur $L^2(G)\widehat{\otimes}L^2(G)$.

Théorème C.2. *L'application $\tilde{B} : L^2(G)\hat{\otimes}L^2(G) \to L^2(G\times G)$ est un isomorphisme isométrique.*

Démonstration.

D'après ce qui précède, il suffit de montrer que $\tilde{B}$ est surjective. G étant à bases dénombrables de voisinages, $L^2(G)$ est séparable et admet donc une base Hilbertienne $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si $(k,l),(m,n) \in \mathbb{N}^2$ on a

$$\begin{aligned}
\langle \psi_k\otimes\psi_l|\psi_m\otimes\psi_n\rangle &= \int_{G\times G} \psi_k(x)\psi_l(y)\overline{\psi_m(x)\psi_n(y)}\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu)(x,y) \\
&= \int_G \psi_k(x)\overline{\psi_m}(x)\mathrm{d}\mu(x) \int_G \psi_l(y)\overline{\psi_n(y)}\mathrm{d}\mu(y) \\
&= \delta_{km}\delta_{ln} \\
&= \delta_{(k,l)(m,n)}.
\end{aligned}$$

Donc la famille $(\psi_n \otimes \psi_m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ est orthonormale dans $L^2(G\times G)$.
Soit $F \in L^2(G\times G)$ orthogonale à la famille $(\psi_n \otimes \psi_m)_{n,m\in\mathbb{N}}$. Pour tous $n,m\in\mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{G\times G} F(x,y)\overline{\psi_n(x)\psi_m(y)}\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu)\,(x,y) \\ &= \int_G\int_G F(x,y)\overline{\psi_n(x)}\mathrm{d}\mu(x)\overline{\psi_n(y)}\mathrm{d}\mu(y). \end{aligned}$$

Ainsi, si $n\in\mathbb{N}$ est fixé, l'application définie presque partout $y\mapsto \int_G F(x,y)\overline{\psi_n(x)}\mathrm{d}\mu(x)$ est orthogonale à la famille $(\psi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ d'où $\int_G F(x,y)\overline{\psi_n(x)}\mathrm{d}\mu(x) = 0$ pour presque tout $y\in G$. Ceci étant vrai pour tout $n\in\mathbb{N}$, pour presque tout $y\in G$ fixé, la fonction définie presque partout $x\mapsto F(x,y)$ est orthogonale à la famille $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc $F(x,y)=0$ pour presque tout $x\in G$. Finalement, on a $F(x,y)=0$ pour presque tout $(x,y)\in G^2$ d'où $F=0$. La famille $(\psi_n\otimes\psi_m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ est donc une base Hilbertienne de $L^2(G\times G)$ et en particulier, $\tilde{B}$ est d'image dense. $\square$

Pendant tout le reste de cette section, on identifiera $L^2(G)\widehat{\otimes}L^2(G)$ et $L^2(G\times G)$. On pose également l'application $m : \begin{array}{ccc} L^\infty(G\times G) & \to & \mathcal{B}(L^2(G\times G)) \\ f & \mapsto & m_f = [g\mapsto fg] \end{array}$.

Procédons désormais à la construction de $L^\infty(G)\otimes L^\infty(G)$. On peut construire, de la même manière que pour $L^2(G)$, une application linéaire $\tilde{B} : L^\infty(G)\odot L^\infty(G) \to L^\infty(G\times G)$ qui envoie $f\otimes g$ sur $[(x,y)\to f(x)g(y)]$.

Proposition C.3. *L'application $\tilde{B} : L^\infty(G)\odot L^\infty(G)\to L^\infty(G\times G)$ est injective.*

Démonstration.

Soit $(f_i)_{i\in I}$ une base de Hamel de $L^\infty(G)$. Considérons $F\in L^\infty(G)\odot L^\infty(G)$ telle que $\tilde{B}(F)=0$. Il existe $J\subset I$ fini et une famille $(\alpha_{ij})_{(i,j)\in J^2}$ de scalaires tels que $F=\sum_{ij}\alpha_{ij}f_i\otimes f_j$.

G étant σ-compact, il existe une suite croissante $(K_s)_{s\geq 1}$ de compacts de G telle que $G=\bigcup_{s\geq 1}K_s$. Renommons les éléments de J par $1,\dots,n$ et montrons par récurrence finie qu'il existe $s\geq 0$ tel que $f_1\mathbb{1}_{K_s},\dots,f_n\mathbb{1}_{K_s}$ soient linéairement indépendants.

<u>Initialisation :</u> Comme $f_1\neq 1$, il existe $s\geq 0$ tel que $f_1\mathbb{1}_{K_s}\neq 0$ et l'indice s convient donc.

<u>Hérédité :</u> Soit $1\leq k\leq n-1$ tel qu'il existe $i\geq 1$ tel que $(f_1\mathbb{1}_{K_i},\dots,f_k\mathbb{1}_{K_i})$ soit libre. Considérons deux cas :

- Si $\mathbb{1}_{K_i}f_{k+1}\notin \mathrm{Vect}(f_1\mathbb{1}_{K_i},\dots,f_k\mathbb{1}_{K_i})$, la famille $(f_1\mathbb{1}_{K_i},\dots,f_{k+1}\mathbb{1}_{K_i})$ est libre donc l'indice i convient.
- Si $\mathbb{1}_{K_i}f_{k+1}\in \mathrm{Vect}(f_1\mathbb{1}_{K_i},\dots,f_k\mathbb{1}_{K_i})$, il existe d'uniques scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{C}$ tels que

$$f_{k+1}\mathbb{1}_{K_i} = \sum_{j=1}^k \lambda_j f_j\mathbb{1}_{K_i}.$$

La famille $(f_1,\dots,f_{k+1})$ étant libre, cette égalité ne peut pas être valable pour tout $s\geq i$ si on remplace i par s. Il existe donc $s\geq i$ tel que

$$f_{k+1}\mathbb{1}_{K_s} \neq \sum_{j=1}^k \lambda_j f_j\mathbb{1}_{K_s}.$$

Supposons que $f_{k+1}\mathbb{1}_{K_s}\in\mathrm{Vect}(f_1\mathbb{1}_{K_s},\dots,f_k\mathbb{1}_{K_s})$. Il existe donc $\mu_1,\dots,\mu_k\in\mathbb{C}$ tels que

$$f_{k+1}\mathbb{1}_{K_s} = \sum_{j=1}^k \mu_j f_j\mathbb{1}_{K_s}$$

mais comme $K_i\subset K_s$, cela implique que

$$f_{k+1}\mathbb{1}_{K_i} = \sum_{j=1}^k \mu_j f_j\mathbb{1}_{K_i}.$$

Par unicité des scalaires $(\lambda_j)_j$, on a $\lambda_j=\mu_j$ pour tout j d'où

$$f_{k+1}\mathbb{1}_{K_s} = \sum_{j=1}^k \lambda_j f_j\mathbb{1}_{K_s}$$

ce qui est absurde. Ainsi, $f_{k+1}\mathbb{1}_{K_s} \notin \mathrm{Vect}(f_1\mathbb{1}_{K_s},\dots,f_k\mathbb{1}_{K_s})$ et comme $(f_1\mathbb{1}_{K_s},\dots,f_k\mathbb{1}_{K_s})$ est libre, ceci implique que $(f_1\mathbb{1}_{K_s},\dots,f_{k+1}\mathbb{1}_{K_s})$ est libre d'où l'indice s convient.

Par le principe de récurrence finie, il existe $s \geq 1$ tel que $(f_1\mathbb{1}_{K_s},\dots,f_n\mathbb{1}_{K_s})$ soit libre. Ces fonctions étant bornées et à support compacts, elles sont de carré intégrable. Soit $(i,j) \in J^2$. Soient $\phi,\psi \in L^2(G)^*$ telles que $\varphi(f_k) = \delta_{k,i}$ et $\psi(f_k) = \delta_{kj}$ pour tout $1 \leq k \leq n$ (de telles formes linéaires existent car $(f_1\mathbb{1}_{K_s},\dots,f_n\mathbb{1}_{K_s})$ est une famille libre de $L^2(G)$). Par le théorème de représentation de Riesz, il existe $g,h \in L^2(G)$ telles que $\varphi = \langle .|g\rangle$ et $\psi = \langle .|h\rangle$. On a donc $\sum_{kl} \alpha_{kl}\mathbb{1}_{K_s\times K_s}\tilde{B}(f_k\otimes f_l) = 0$ d'où

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{kl} \alpha_{kl}\left\langle \mathbb{1}_{K_s\times K_s}\tilde{B}(f_k\otimes f_l)\middle| g\otimes h\right\rangle \\
&= \sum_{kl} \alpha_{kl}\left\langle \mathbb{1}_{K_s} f_k\middle| g\right\rangle \left\langle \mathbb{1}_{K_s} f_l\middle| h\right\rangle \\
&= \sum_{kl} \alpha_{kl}\varphi(f_k)\psi(f_l) \\
&= \sum_{kl} \alpha_{kl}\delta_{ki}\delta_{lj} \\
&= \alpha_{ij}.
\end{aligned}$$

D'où $F = 0$ et $\tilde{B}$ est injective. □

On peut donc identifier $L^\infty(G)\odot L^\infty(G)$ et son image par $\tilde{B}$, c'est-à-dire identifier $f\otimes g$ et $[(x,y)\mapsto f(x)g(y)]$. On pose également $m : \begin{array}{ccc} L^\infty(G\times G) & \to & \mathcal{B}(L^2(G\times G)) \\ F & \mapsto & [m_F : g \mapsto Fg] \end{array}$.

Proposition C.4.
$m(L^\infty(G))\odot m(L^\infty(G))$ est σ-faiblement dense dans $m(L^\infty(G\times G))$. En particulier, on a

$$m(L^\infty(G))\otimes m(L^\infty(G)) = m(L^\infty(G\times G))$$

Démonstration.

Nous allons procéder de la même manière que dans la preuve de la Proposition 2.2.

Soit $T \in m(L^\infty(G)\odot L^\infty(G))'$. G étant σ-fini, il existe une partition dénombrable $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de G composée de boréliens de mesure finie non nulle de G. Si $n,m \in \mathbb{N}$, on pose $B_{n,m} = B_n \times B_m$. La famille $(B_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ est alors une partition dénombrable composée de boréliens de mesure finie non nulle de $G\times G$. Pour tous $n,m\in\mathbb{N}$, on pose $T_{n,m} = T(\mathbb{1}_{B_{n,m}})$. Soient $n,m\in\mathbb{N}$. Comme T commute avec la multiplication par $\mathbb{1}_{B_{n,m}} = \mathbb{1}_{B_n}\otimes\mathbb{1}_{B_m}$, on a

$$\mathbb{1}_{B_n,m}T_{n,m} = m_{\mathbb{1}_{B_{n,m}}}T(\mathbb{1}_{B_{n,m}}) = Tm_{\mathbb{1}_{B_{n,m}}}(\mathbb{1}_{B_{n,m}}) = T(\mathbb{1}_{B_{n,m}}) = T_{n,m}$$

d'où $T_{n,m}$ est essentiellement supportée dans $B_{n,m}$.
Supposons que $\left\|T_{n,m}\right\|_\infty > \|T\|_{\mathrm{op}}$. Il existe alors $X \subset G$ de mesure non nulle sur lequel $|T_{n,m}| > \|T\|_{\mathrm{op}}$. Posons

$$g = \frac{1}{T_{n,m}}\mathbb{1}_X \in L^2(G\times G)\cap L^\infty(G\times G).$$

$T_{n,m}$ étant supportée essentiellement sur $B_{n,m}$, on a $X\subset B_{n,m}$. On a donc

$$\mu(X) = \left\|T_{n,m}g\right\|_2^2 = \left\|T(\mathbb{1}_{B_{n,m}})g\right\|_2^2 = \|T(g)\|_2^2 \leq \|T\|_{\mathrm{op}}^2\|g\|_2^2 < \|T\|_{\mathrm{op}}^2\frac{\mu(X)}{\|T\|_{\mathrm{op}}^2} = \mu(X).$$

Cette inégalité est absurde donc on a $\left\|T_{n,m}\right\|_\infty \leq \|T\|_{\mathrm{op}}$.
Les $B_{n,m}$ étant disjoints, on peut poser

$$T_G = \sum_{n,m} T_{n,m} \in L^\infty(G\times G).$$

Pour tous $f,g \in L^2(G\times G)\cap(L^\infty(G)\odot L^\infty(G))$, on a

$$\begin{aligned}\int_{G\times G} T(f)\overline{g}\mathrm{d}\mu &= \sum_{n,m\in\mathbb{N}} \int_{B_{n,m}} T(f)\overline{g}\mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{n,m\in\mathbb{N}} \int_{G\times G} T_n f\overline{g}\mathrm{d}\mu \\ &= \int_{G\times G} T_G f\overline{g}\mathrm{d}\mu \\ &= \int_{G\times G} m_{T_G}(f)\overline{g}\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

La première égalité est justifiée par la relation de Chasles, la deuxième provient de fait que T commute avec les $m_{\mathbb{1}_{B_{n,m}}}$ ainsi qu'avec m_f et la troisième est due à l'intégrabilité de $T_G f\overline{g}$ en vertu du fait que $T_G \in L^\infty(G\times G)$. D'après le Théorème C.2, $L^2(G)\odot L^2(G)$ est norme-dense dans $L^2(G\times G)$ et $C_c(G)$ est norme-dense dans $L^2(G)$ donc $C_c(G)\odot C_c(G)$ est norme-dense dans $L^2(G\times G)$ d'où $L^2(G\times G)\cap(L^\infty(G)\odot L^\infty(G))$ est dense dans $L^2(G\times G)$ pour la topologie normique. L'égalité

$$\int_{G\times G} T(f)\overline{g}\mathrm{d}\mu = \int_{G\times G} m_{T_G}(f)\overline{g}\mathrm{d}\mu$$

a donc lieu pour tous $f, g \in L^2(G\times G)$.
Ainsi, pour tout $f \in L^2(G\times G)$, on a $T(f) = m_{T_G}(f)$. Il suit que $T = m_{T_G} \in m(L^\infty(G\times G))$ et on a donc finalement $m(L^\infty(G\times G))' = L^\infty(G\times G)$. □

Ainsi, $L^\infty(G\times G)$ s'interprète comme le produit tensoriel d'algèbres de von Neumann $L^\infty(G)\otimes L^\infty(G)$.

D Intégrale de Bochner

L'intégrale de Bochner est une généralisation de l'intégrale de Lebesgue pour les fonctions définies sur un espace mesuré à valeurs dans un espace de Banach. Nous donnons ici, principalement sans preuve, les résultats dont nous aurons besoin. Pour plus de précisions à propos de l'intégrale de Bochner, se référer à [2].

Durant toute cette section un espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu)$ et un espace de Banach $(V, \|.\|)$. On dit que $f : X \to V$ est une fonction simple s'il existe $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{T}$ disjoints et de mesure finie et $b_1, \ldots, b_n$ tels que $f = \sum_{i=1}^{n} b_i \mathbb{1}_{A_i}$.
On définit alors l'intégrale de f par $\int_X f\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)b_i$.

On munit V de sa tribu de Borel. Une fonction mesurable $f : X \to V$ est dite Bochner-intégrable s'il existe une suite de fonctions simple $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (appelée suite approximante) telles que

$$\int_X \|f - s_n\|\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Théorème D.1. *Soit $f : X \to V$ une application intégrable et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite approximante.*

- *La suite de vecteurs $\left(\int_X s_n\mathrm{d}\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans V. Sa limite ne dépend pas du choix pour $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On peut donc définir l'intégrale de f par*

$$\int_X f\mathrm{d}\mu \triangleq \lim_{n\to+\infty} \int_X s_n\mathrm{d}\mu.$$

- *On a $\left\|\int_X f\mathrm{d}\mu\right\| \leq \int_X \|f\|\mathrm{d}\mu < +\infty$.*
- *Si W est un autre espace de Banach et si $T : V \to W$ est une application linéaire continue, on a*

$$T\left(\int_X f\mathrm{d}\mu\right) = \int_X T(f)\mathrm{d}\mu.$$

- *Si $V = \mathbb{C}$, l'intégrale de Bochner de f coïncide avec son intégrale de Lebesgue.*

L'intégrale de Bochner d'une fonction à valeurs dans un espace de Banach possède donc toutes les propriétés qu'on voudrait qu'elle admette. L'intégrabilité selon Bochner possède également une caractérisation raisonnable, qui fait l'objet du théorème suivant.

Une fonction $f : X \to V$ est dite séparable s'il existe une partie dénombrable $C \subset V$ telle que $f(X) \subset \overline{C}$. f est dite essentiellement séparable s'il existe $N \subset X$ de mesure nulle tel que $f_{|X \setminus N}$ soit séparable. Clairement, si V est séparable alors toute application $f : X \to V$ est séparable.

Théorème D.2. *Soit $f : X \to V$ mesurable. On a équivalence entre*

- *f est Bochner-intégrable.*
- *f est essentiellement séparable et $\displaystyle\int_X \|f\| \mathrm{d}\mu < +\infty$.*

Nous aurons également besoin d'une autre condition d'intégrabilité qui précise sensiblement la nature topologique de l'intégrale de Bochner d'une application.

En remarquant que lorsque $f(X)$ est séparable, l'espace de Banach $\overline{\mathrm{Vect}(f(X))}^{\|\cdot\|}$ est également séparable, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire D.3.
Soit $f : X \to V$ mesurable telle que $\displaystyle\int_X \|f\| \mathrm{d}\mu < +\infty$ et dont l'image est séparable. f est alors Bochner-intégrable et de plus, $\displaystyle\int_X f \mathrm{d}\mu \in \overline{\mathrm{Vect}(f(X))}^{\|\cdot\|}$.

Références

[1] Saad Baaj and Stefaan Vaes. Double crossed products of locally compact quantum groups. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, 4(1) :135–173, January 2005.

[2] Anton Deitmar and Siegfried Echterhoff. *Principles of harmonic analysis*. Springer, 2014.

[3] P.R. Halmos. *Measure Theory*. Graduate texts in mathematics. Springer, 1974.

[4] Johan Kustermans and Stefaan Vaes. Locally compact quantum groups. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 33(6) :837–934, 2000.

[5] Johan Kustermans and Stefaan Vaes. Locally compact quantum groups in the von neumann algebraic setting, 2000.

[6] M. Takesaki. *Theory of Operator Algebras I*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer Berlin Heidelberg, 2001.

[7] M. Takesaki. *Theory of Operator Algebras II*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer Berlin Heidelberg, 2002.

[8] Stefaan Vaes. The unitary implementation of a locally compact quantum group action, 2000.

[9] Stefaan Vaes and Leonid Vainerman. Extensions of locally compact quantum groups and the bicrossed product construction. *Advances in Mathematics*, 175(1) :1–101, 2003.

[10] Stanislaw Woronowicz. Twisted su (2) group. an example of a non commutative differential calculus. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 23, 03 1987.